COMUNICAZIONE DELLE SCIENZE 2016

MATEMAZZLE

Schede di Approfondimento

A cura di

Sarah Benedetto

Salvatore Corso

Giulia Gnesotto

NUMERO AUREO

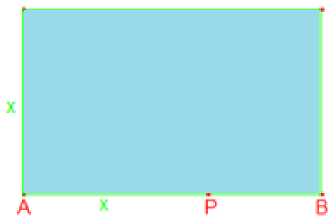
Il numero aureo o proporzione aurea o divina proporzione è impossibile da riprodurre numericamente per intero, poiché è infinito e le cifre non seguono un modello, non sono ricorsive. Per questo motivo è un numero irrazionale. La sua definizione è la seguente:

- *Definizione per esteso*: la misura dell'intero segmento rispetto alla sua parte aurea (AB/AP= Φ), dove si fa riferimento alla seguente figura:

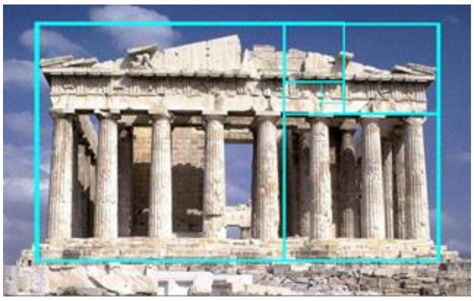
- *Definizione in formule*: $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

STORIA ED ORIGINE: La definizione di numero aureo enunciata sopra, si deve a Euclide (325-265 a.C.) che nella sua famosa raccolta di libri Elementi di Geometria è il primo che definisce in modo rigoroso il rapporto aureo. Nel 1509 il matematico Luca Pacioli dedicò alla sezione aurea un intero trattato, chiamandola "Divina Proportione". Keplero nel 1600 la denominò Sectio Divina (sezione divina) per le sue caratteristiche artistiche. Il simbolo con cui oggi identifichiamo il numero aureo, phi, Φ, venne attribuito all'inizio del XX secolo, quando il matematico nordamericano Mark Barr propose di legare il numero a Fidia.

Ma perché si decise di dedicare l'iniziale di questo numero proprio a Fidia? Come ben sapete Fidia è l'architetto classico per antonomasia. Nella sua opera più famosa, il Partenone ad Atene, si scopre con stupore che i suoi vari elementi possono venire scomposti in rettangoli aurei.. ma cosa sono i rettangoli aurei?



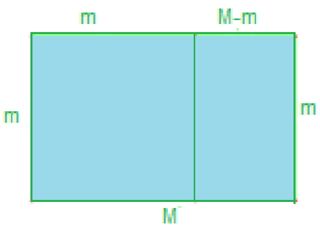
Un rettangolo è detto aureo se il suo lato minore è la sezione aurea del lato maggiore, ossia il rapporto fra il lato maggiore e il lato minore è uguale a Φ.



A sinistra: Il Partenone.

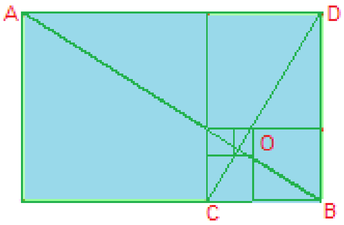
A destra: la Flagellazione di Cristo di Piero della Francesca è diviso in due rettangoli aurei.

Il rettangolo aureo è l'unico che ci consente, se gli sottraiamo il quadrato costruito sul lato minore, di ottenere di nuovo un rettangolo aureo e così via all'infinito. Infatti, come illustra la figura, supponiamo che le dimensioni del rettangolo "genitore" siano M e m con m < M e $\frac{M}{m} = \varphi$; le dimensioni del rettangolo "figlio" sono quindi m e M - m e $\frac{M-m}{m} = \frac{M}{m} - 1 = \phi - 1 = \frac{1}{\phi}$;



$\frac{m}{M-m} = \phi$, quindi pure il rettangolo "figlio" è aureo.

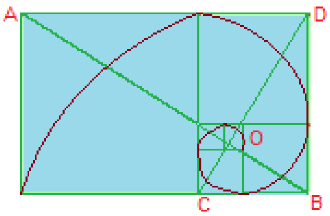
Costruendo altri rettangoli aurei sempre più piccoli attraverso successive sottrazioni di quadrati e in ciascuno tracciando le due diagonali, notiamo che:



- esse si situano tutte sulle rette AB e CD;
- sono sempre perpendicolari tra loro;
- si intersecano sempre in O per quanto le dimensioni diminuiscano.

Nel punto O convergono tutti i rettangoli che la nostra immaginazione può produrre. Il matematico C.A. Pickover ha proposto di chiamare tale punto "occhio di Dio".

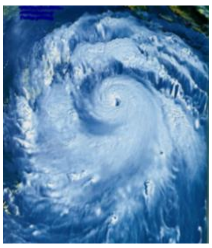
Dunque, partendo da un rettangolo aureo, dal quale sottraiamo il quadrato costruito sul lato minore, in modo tale da ottenere un altro rettangolo aureo e così via, e tracciando in ciascuno dei quadrati archi di circonferenza aventi per raggio il lato del quadrato e come centro un vertice di ciascuno di essi: come illustrato in figura, continuando indefinitamente, otteniamo una curva, detta "**spirale aurea**", formata da archi di circonferenza, che si avvicinano con buona approssimazione ad una spirale logaritmica.



Le spirali logaritmiche sono anche dette "mirabili" per le loro proprietà matematiche ed estetiche. Infatti in natura ci sono svariati esempi di spirali logaritmiche, quali le conchiglie, i vortici degli uragani, le galassie e in particolare la traiettoria seguita dal falco pellegrino piombando su una preda a oltre 300 chilometri all'ora.

Il falco pellegrino.

Una conchiglia.



Uragano.

Galassia.

MUSICA E MATEMATICA: L'accordatura secondo i pitagorici

La musica è una delle principali manifestazioni culturali dell'umanità. È presente in ogni luogo per commuovere e infondere piacere.

Forse, però, non tutti sanno che la matematica è in grado di analizzare il fenomeno musicale, in particolare a studiare le relazioni che ci sono fra i suoni.

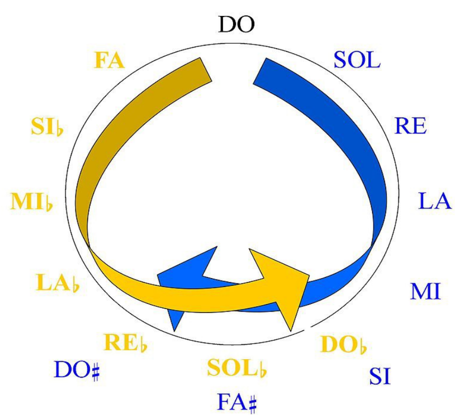
La scuola pitagorica (VI secolo a.C.) è stata forse la prima a studiare questo fenomeno. I loro studi presero avvio a partire dai suoni prodotti da una singola corda di uno strumento monocorde. Si accorsero che il tono di una nota musicale dipendeva dalla lunghezza della corda, in particolare più questa era corta, più acuto ne risultava il suono. Cominciarono a mettere in relazione gli intervalli tra due note con semplici rapporti numerici (dove ogni intervallo viene identificato in base al numero di note attraverso le quali bisogna passare per giungere da una all'altra, ad esempio per andare da *do* a *fa* si passa per quattro note: *do-re-mi-fa,* quindi questo intervallo verrà detto “di quarta”).

Il rapporto numerico più semplice si ottiene premendo una corda a metà della sua lunghezza che numericamente corrisponde a 2:1, mentre musicalmente corrisponde all'intervallo di ottava (da *do* a *do*). Altri semplici rapporti sono 3:2, ottenuto premendo la corda ad un terzo della lunghezza totale, corrispondente ad un intervallo di quinta (*do – sol*), e 4:3, che si ottiene premendo la corda ad un quarto della lunghezza totale, corrispondente ad un intervallo di quarta (*do – fa*).

In questo modo crearono uno schema in base al quale gli intervalli dei suoni sono espressi da frazioni nella forma: $\frac{n+1}{n}$. Questi risultavano essere suoni armonici e gradevoli, in conseguenza del fatto che il rapporto era molto piccolo.

A partire da questo studio, i pitagorici organizzarono le scale musicali basandosi su questi semplici rapporti numerici, in particolare la **scala pitagorica** è strutturata su due intervalli: l'ottava, che presenta un rapporto di frequenza tra le due note di 2/1, e la quinta, il cui rapporto è 3/2.

In pratica, se prendiamo il *do* come esempio, per ottenere il *sol*, che si trova a un intervallo di quinta, sappiamo che la sua frequenza sarà i 3/2 di quella del *do*. In seguito, una nuova concatenazione di quinta ci porterà al *re,* la cui frequenza risulterà essere i 3/2 di quella del *sol*, e così via.



Con questo metodo di concatenazione delle quinte e “eliminazione” delle ottave (ovvero moltiplicare o dividere per 2) in modo che il rapporto tra le frequenze sia sempre compreso fra 1 (quello che ha il *do* con sé stesso) e 2 (quello che ha il *do* con il *do* della scala successiva), è possibile accordare ogni nota (figura a lato).

Facendo i conti, partendo da *do*, per prima cosa possiamo determinare il *sol*: $sol = \frac{3}{2}$

Quindi, salendo di una quinta, troviamo il *re* moltiplicando per 3/2, dopo aver eliminato un'ottava:

$$re = sol\ \frac{3}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

Quindi il *la*, a una quinta dal *re:*

$$la = re\ \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$$

La scala si completa con il *mi*, a una quinta dal *la*, con il *si*, a una quinta dal *mi*, e infine con il *fa* una quinta sotto il *do*, salendo di un'ottava.

Riassumendo, prendendo il *do* con valore normalizzato 1, abbiamo:

Nota	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Rapporto di frequenze	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

A questo punto, qualcuno si starà chiedendo perché nel calcolare il rapporto di frequenze del *fa* si è tornati indietro dal *do*, invece che proseguire dal *si*. Questo si fa perché salendo di una quinta dal *si* non si raggiunge il *fa*, bensì il *fa#*. Allo stesso modo, se scendiamo di una quinta dal *fa* arriviamo al *si* ♭. Continuando a scendere troviamo in ordine il *mi* ♭, il *la* ♭, il *re* ♭, ed infine il *sol* ♭, arrivando così a completare la scala cromatica composta da 12 suoni (vedi figura).

do	**do#** **reb**	**re**	**re#** **mib**	**mi**	**fa**	**fa#** **solb**	**sol**	**sol#** **lab**	**la**	**la#** **sib**	**si**

Facendo i conti, abbiamo:

Nota	Re ♭	Mi ♭	Sol ♭	La ♭	Si ♭
Rapporto di frequenze	$\frac{256}{243}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{1024}{729}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{16}{9}$

In teoria le frequenze del *fa#*, ottenuta salendo di una quinta dal *si*, e quella del *sol* ♭, ottenuta scendendo dal *re* ♭, dovrebbero coincidere. In realtà non è così, c'è una piccola differenza chiamata "comma pitagorico". Questo valore è possibile calcolarlo a partire da una frequenza *f* e confrontando con la concatenazione di dodici quinte a partire da *f* con la concatenazione di sette ottave:

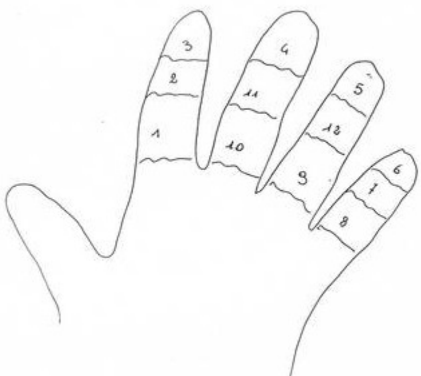
$$CP = \frac{f\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{f\cdot 2^{7}} = 1{,}013643265$$

MISURE

“Quando puoi misurare quello di cui parli ed esprimerlo con numeri, ne sai qualcosa; ma quando non lo puoi esprimere coi numeri, la tua conoscenza è povera ed insoddisfacente”. Così scriveva il fisico e matematico William Thompson, lord Kelvin, creatore della scala di temperature assolute nel 1848. Effettivamente, come egli chiarì, misurare è qualcosa di fondamentale per la scienza, ma lo è anche nella quotidianità.

Nel corso della giornata compiamo, in modo naturale, l'attività di misurare in moltissime azioni. Quando passiamo sotto una porta, lo facciamo con decisione, perché sappiamo che riusciremo a passare oltre, magari abbassandoci un po'; se dobbiamo attraversare la strada mentre sopraggiunge una macchina sappiamo decidere se passare o se aspettare. Questi sono solo alcuni degli esempi che ci dimostrano come costantemente facciamo delle scelte che richiedano una comparazione tra grandezze.
Ciò nonostante, il misurare, insieme al contare, viene più facilmente associato alla matematica, perché si utilizzano i numeri.
I simboli per esprimere i numeri li troviamo come costante nella storia. Questo mostra come i nostri antenati avevano la necessità di dare un ordine alle proprie attività: necessitavano di strumenti per contare i giorni, di sapere qual era il momento migliore per seminare e di assicurarsi che gli animali usciti al mattino dalle stalle tornassero poi tutti la sera, etc.

Naturalmente il concetto di contare di un tempo è molto diverso da come lo intendiamo noi oggi.
Ogni civiltà ha sviluppato il proprio sistema, il proprio linguaggio. Ciò non toglie che tutte quante abbiano preso ispirazione dal mondo che le circondava. In particolare prendevano spunto dagli oggetti che avevano più vicino, come le dita delle mani: infatti la maggior parte dei sistemi di numerazione sono in base 10. Altri però hanno scelto la base 12, probabilmente perché si poteva applicare meglio alla divisione (12 ha più divisori di 10). Altri ancora, come i Maya, gli Aztechi, i Celti e i Baschi, adottarono la base 20 considerando anche le dita dei piedi. Ai Sumeri e ai Babilonesi si deve la base 60, oggi ancora utilizzata per dividere l'ora nei suoi sottomultipli, i minuti e i secondi.



Oltre alle dita, sono state usate come mezzo di conta anche le mani.
Le falangi e le articolazioni venivano usate da Egizi, Romani, Arabi e Persiani per contare da 1 a 9.999. I Cinesi, addirittura, con due mani arrivarono a contare fino a 100.000.
Un altro metodo per fare i calcoli è stato l'uso dei ciottoli (da cui deriva il termine calcolo, dal latino *calculus,* “piccolo ciottolo”).
La scrittura del numero apparve in uno stadio successivo. Pare che alcuni contabili decisero di sostituire i ciottoli prima con oggetti d'argilla di diverse forme e dimensioni, poi semplicemente con segni sull'argilla stessa.

La misurazione è un'altra attività significativa per lo sviluppo delle idee matematiche e si occupa di confrontare, ordinare e quantificare. Anche se tutte le culture riconoscono l'importanza di certe cose, non tutte misurano le stesse, né lo fanno con le stesse misure.
Certamente tra le prime necessità c'erano la misurazione di distanze e la valutazione delle quantità di cibo. Le prime venivano confrontate con il tempo impiegato per arrivare, ad esempio a piedi, o a cavallo. Le secondo tramite gli utensili utilizzati per contenerlo, come le tazze, i sacchi, i cesti, etc. Questi metodi vengono ancora usati oggi in alcuni casi: le camminate in montagna vengono valutate in base alle ore di cammino, le dosi per i dolci spesso sono i cucchiai o le tazze.
Nel corso del tempo si è passati ad altre unità di misura: per le distanze si è passati allo stadio, alla lega, al miglio (circa 8 stadi); per le superfici di terra seminata, al farrado o alla fanega, che misuravano la produttività di una determinata superficie di terra tenendo conto della quantità di grano che poteva dare. Erano dunque unità che dipendevano da molteplici fattori e che erano molto variabili.
Si è così giunti alla creazione di un sistema universale: il Sistema Internazionale di Misura (SI).
Esso è la modernizzazione del Sistema Metrico Decimale.

Grandezza fisica di base	Unità di base	Anno di definizione dell'unità	Simbolo
Lunghezza	Metro	1983	m
Massa	Chilogrammo	1889 (1901)	kg
Tempo	Secondo	1967-1968	s
Intensità di corrente elettrica	Ampere	1948	A
Temperatura	Kelvin	1967-1968	K
Quantità di sostanza	Mole	1971	mol
Intensità luminosa	Candela	1979	cd

Ogni unità del modello deve rispettare 3 condizioni:

- Inalterabilità (non cambia nel tempo né si altera per azione della persona che effettua la misurazione);
- Universalità (utilizzabile in qualunque luogo della Terra);
- Riproducibilità (facilmente riproducibile).

Vi sono però unità che non appartengono all'SI, ma che, poiché utilizziamo tutti i giorni, vengono accettate. Ne sono un esempio il minuto, l'ora e il giorno; un altro il litro e l'ettaro.
Alcuni Paesi non hanno adottato come principale sistema l'SI ma ne hanno uno loro. Ad esempio negli Stati Uniti troviamo il Sistema Consuetudinario Statunitense, sviluppatosi da quello britannico imperiale. Come unità di misura troviamo il pollice, il piede, la iarda ed il miglio per le lunghezze; per il peso l'oncia e la libbra.

DONNE DELLA MATEMATICA

Dedichiamo questa pagina alle storie, altre più, altre meno affascinanti, delle donne più note nel campo matematico, tenendo sempre ben in considerazione il fatto che storicamente le donne erano esseri socialmente inferiori agli uomini. È per questo che le figure qui raccontate sono ancora più degne di ammirazione.

EMELIE DE BRETEUIL:

Emelie De Breteuil.

- **Periodo**: Parigi, 1706 - Luneville, 1749
- **Vita**: Nacque da una nobile famiglia. Sposò Florent Claude col quale ebbe due figli. Successivamente, Emelie, svolti i suoi doveri nei confronti di suo marito, gli disse che sarebbe andata a vivere a Cirey, una proprietà del marito. In altre parole continuava ad essere spostata, ma avrebbe potuto avere amanti e vivere come volesse. A Cirey visse assieme a Voltaire, che fu suo amante per molti anni. Morì per un parto all'età di 43 anni.
- **Interessi Matematici**: Tradusse in francese i Principia di Newton.
- **Curiosità**: a 12 anni conosceva spagnolo, inglese, tedesco e italiano e sapeva tradurre greco e latino. Andava spesso a giocare a carte con le altre duchesse, e vinceva quasi sempre e il suo guadagno erano libri (aveva la più grande biblioteca dei tempi). Quando litigava con Voltaire, lo facevano in inglese cosicché il personale in servizio non potesse capire.

EMMY NOETHER:

Emmy Noether.

- **Periodo**: Erlangen, 1882 - Bryn Mawr,1935
- **Vita**: Nonostante suo padre fosse professore di matematica all'Università di Erlangen, la suo iscrizione all'università era vietata, e dunque dovette ricorrere alla figura dello studente uditore. La sua intelligenza non sfuggì ai più grandi matematici del tempo, Klein e Hilbert, con i quali divenne molto amica. Dal 1922 insegnò all'università di Gottinga come assistente di Hilbert (non poteva avere la cattedra di matematica una donna) e per le suo origini ebree fu costretta ad emigrare negli Stati Uniti, dove insegno al Bryn Mawr College. Morì per un'embolia.
- **Interessi Matematici**: Algebra astratta
- **Curiosità**: Edmund Landau disse "posso riconoscere il suo genio matematico, ma non posso giurare che sia una donna". Pare infatti che Emmy avesse un aspetto mascolino.

JULIA BOWMAN ROBINSON:

Julia Bowman.

- **Periodo**: Saint Louis, 1919 - Oakland, 1985
- **Vita**: Fin dai tempi della scuola si notò il suo genio scientifico. Frequentando corsi all'Università di Berkeley, conobbe il suo futuro marito, Raphel Robinson, anch'egli appassionato di matematica. Non potendo avere figli, si dedicò interamente alla matematica. Nel 1984 le fu diagnosticata la leucemia della quale morì.
- **Interessi Matematici:** Risoluzione del decimo problema di Hilbert, arrivandoci vicinissima.
- **Citazioni**: "Lunedì: cercare di dimostrare un teorema. Martedì: cercare di dimostrare un teorema. Mercoledì: cercare di dimostrare un teorema. Giovedì: cercare di dimostrare un teorema. Venerdì: teorema falso."

NUMERI PRIMI

"I matematici hanno cercato invano di scoprire un qualche ordine nella successione dei numeri primi, e abbiamo ragione di credere che è un mistero che la mente umana non potrà mai penetrare."

Leonhard Euler

La maggior parte dei numeri ha un comportamento che potremmo definire "ordinato": i pari si alternano sempre ai dispari, i multipli di 3 compaiono sempre ogni tre numeri, i quadrati perfetti seguono una regola di formazione facile da determinare. Seguendo questo principio potremmo generare una lunga lista di numeri che fanno ciò che da essi ci si aspetta, non importa quanto grandi siano o dove siano collocati. Al contrario, i numeri primi sono "disordinati": appaiono dove vogliono in modo apparentemente caotico e senza seguire alcun tipo di regola. Tuttavia, non si possono ignorare: sono l'essenza stessa dell'aritmetica e, in un certo senso, di tutta la matematica.

I numeri primi, come tutto, hanno avuto un'origine, una nascita, che bisogna cercare negli stessi inizi dei sistemi di numerazione. Comparvero assieme ai numeri naturali, però molto presto si distinsero come "numeri speciali".

Cosa sono quindi i numeri primi?

Prima di tutto sono numeri naturali, numeri con cui abbiamo a che fare tutti i giorni. Tutti conosciamo questi numeri, fin da quando siamo piccoli abbiamo imparato a contare, numerare, raggruppare. Per quanto lungo e noioso sia, chiunque fra di noi potrebbe elencarli: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e così via. Inoltre bastano solamente dieci cifre per comporre qualsiasi numero secondo il modo in cui esse si dispongono. Questo grazie al nostro sistema di numerazione posizionale che utilizziamo ogni giorno, nel modo più "naturale". Infatti ogni cifra in un numero assume un diverso significato secondo la posizione che occupa. Creare un sistema di numerazione posizionale non è stato un compito propriamente semplice: ci sono voluti più di mille anni per riuscirci. Tratteremo comunque questo approfondimento col presupposto che i numeri già ci siano e che, inoltre, conosciamo le operazioni base di somma, differenza, moltiplicazione e divisione.

Perchè i numeri primi si distinguono dagli altri? Cosa li rende così "speciali"?

Prendiamo un numero qualunque, ad esempio il 12. Sappiamo che possiamo esprimere questo numero in forme differenti, come prodotto di altri numeri: 12=2*6; 12= 3*4; 12= 2*2*3.

Da adesso ci riferiremo a questi numeri come "fattori" o "divisori". Diremo infatti che 3 è un fattore di 12, così come 3 è un divisore di 12.

Divisore significa che divide, infatti il 3 divide il 12. Ugualmente diremo che 5 è un divisore di 20. Affermando che divide, ciò che vogliamo dire è che se effettuiamo l'operazione di 20 diviso 5 otteniamo un numero naturale, in questo caso 4, e che il resto della divisione è zero.

Anche la parola fattore ha un significato preciso. Viene dal latino facere, "fare o "fabbricare".

Nell'espressione 12=3*4, il numero 3 è un fattore perchè è un numero che permette di costruire il 12.
In base a questo, quando ci domandiamo quali siano i divisori di 12 possiamo rispondere che 2,3,4,6 sono divisori di 12, infatti 12 diviso per qualunque di essi da un numero esatto. A questi ultimi dobbiamo aggiungere anche 1 e il 12 stesso. Infatti qualsiasi numero ha come divisori almeno uno e se stesso.
Pensiamo adesso ai divisori di 7. Se cerchiamo possibili divisori di 7 troveremo che gli unici numeri che dividono 7 sono uno e lo stesso 7. Similmente ciò accade per 2,3,5,11 o 13. Il fatto è che tutti questi numeri sono “primi”.
Ora possiamo dare una definizione precisa di quello che è un numero primo: si dice che un numero è primo se è divisibile solo per se stesso e per uno.

Teorema fondamentale dell'aritmetica

Ci si riferisce di frequente ai numeri primi come ai “mattoni” della matematica, gli atomi dell'aritmetica o il codice genetico dei numeri. Con i mattoni si costruiscono le case; con gli atomi tutti gli elementi della natura; con il codice genetico gli essere viventi. Tutte queste espressioni hanno un significato comune: elementi primogeniti a partire dai quali si genera qualcosa, in questo caso i numeri. Vediamo come hanno assunto questo ruolo i numeri primi.
Abbiamo visto come un numero può scomporsi in fattori o divisori. Così il numero 12 può scomporsi in 3*4 ma, come abbiamo visto, tale scomposizione non è unica:12=2*6=3*4=2*2*3. Sono tutti fattori del numero 12. Tale processo viene definito “scomposizione di un numero in un prodotto di fattori”. Ricordiamo che questo è il criterio che ci ha permesso di dare una definizione precisa di ciò che è un numero primo: quello i cui unici fattori sono se stesso e uno. In base a ciò gli unici fattori di un numero primo, come il 13 sono 13=1*13.
Quando in un prodotto uno dei fattori si ripete scriviamo il numero con un apice che indica il numero di volte che questo si ripete. Ad esempio 2*2*2*2*2=2^5 e 3*3*3*3=3^4. Questo è ciò che in matematica si definisce “potenza” e si legge due elevato alla quinta e tre elevato alla quarta.
Nell'esempio precedente abbiamo scomposto il 12 in 3 prodotti di fattori differenti: 2 e 6, 3 e 4, 2,2 e 3. Di tutti l'ultimo è l'unico che è formato unicamente da numeri primi. Vediamo ancora un esempio con un altro numero qualsiasi, come il 20: 20=2*10=2*2*5=4*5 Solo la scomposizione 20=2*2*5=2^2*5 contiene esclusivamente fattori primi.
La domanda che ci poniamo adesso é: dato un numero qualunque è sempre possibile trovarne una scomposizione in fattori primi? Ovvero, si può esprimere tale numero come un prodotto di numeri che siano tutti primi? La risposta è si. Non solo, ma si può farlo in una sola maniera. Quando scriviamo il numero 20 come prodotto di fattori primi, 20=2^2*5, lo facciamo nell'unico modo possibile nel quale si possa fare (si intende che l'ordine dei fattori non è influente, infatti 2*5*2 è lo stesso di 5*2*2). Questo è il teorema, attribuito ad Euclide, conosciuto come il “teorema fondamentale dell'aritmetica” che dice: “Ogni numero naturale si può scomporre in un unico modo come prodotto di fattori primi”.
Il titolo di “teorema fondamentale” è totalmente giustificato, siccome è, letteralmente, uno dei grandi pilastri

su cui poggia l'aritmetica.
I numeri primi sono quindi gli elementi primordiali con in quali si costruiscono tutti i numeri. La parola "primo" proviene dal latino primus e allude al concetto di "primario", "primitivo", nel senso di origine, poiché tutti i numeri si possono ottenere a partire da essi. Nello stesso modo in cui gli atomi si uniscono a formare molecole, i numeri primi formano i numeri naturali. Sappiamo però che tutti gli elementi chimici sono conosciuti e raggruppati nella tavola periodica degli elementi. Non esiste tuttavia niente di analogo per i numeri primi, un qualche tipo di tavola che permetta di raggrupparli seguendo un criterio. I numeri primi appaiono come un insieme caotico, senza ordine né accordo e si distribuiscono in maniera apparentemente aleatoria nella serie dei numeri naturali.

Il numero 1 è un numero primo?

La risposta è no. Il motivo è racchiuso nel teorema fondamentale dell'aritmetica sopra descritto.
Prendiamo ad esempio il numero 15. Sappiamo che la sua scomposizione in fattori primi è 15=5*3, che volendo possiamo scrivere anche 15=3*5 grazie alla proprietà commutativa della moltiplicazione. Possiamo cambiare l'ordine in cui scriviamo i fattori, ma essi sono sempre gli stessi e non cambiano, cioè sono unici.
Se candidassimo 1 come numero primo potremmo invece scrivere: 15=3*5*1 oppure 15=3*5*1*1 o ancora 15=3*5*1*1*1 e continuare ulteriormente.
In parole povere l'1 nella fattorizzazione si può ripetere infinite volte, ottenendo sempre 15. Si verrebbe quindi a perdere l'unicità della scomposizione in fattori primi. Ecco il motivo per cui i matematici hanno convenuto di non considerare l'1 come numero primo.

Quanti sono i numeri primi?

Una delle prime domande che si presentano riguardo alla classe dei primi è se esiste soltanto un numero finito di primi diversi tra loro o se la classe dei primi contiene infiniti elementi. La risposta è: esistono infiniti numeri primi. Tale risultato è ricordato come Teorema di Euclide e la sua dimostrazione è considerata una delle gemme della matematica antica.

Esiste una formula per trovare i numeri primi?

Sono stati fatti dei tentativi per trovare delle semplici formule aritmetiche che diano soltanto numeri primi, anche se magari non tutti. Questa ricerca è stata per molti matematici una fatica inutile ed è ancora meno probabile che conduca a buoni risultati il tentativo di trovare una formula algebrica che dia luogo a tutti i numeri primi.

A cosa servono i numeri primi?

Trovare numeri primi, s'intende numeri primi grandi, non è un compito facile, perchè, come abbiamo visto, nessuno ancora è stato in grado di trovare la formula, l'algoritmo, che ci permetta di costruire numeri primi a discrezione. “Perchè vogliamo generare numeri primi?”. Ci sono due risposte:

- La prima è che vi è un interesse teorico; l'intento è quello di promuovere la nascita di strumenti di calcolo interessanti, specialmente di calcolo informatico. Inoltre, disporre di enormi liste di numeri primi serve anche a verificare teoremi che non sono stati ancora dimostrati. Se qualcuno lancia una congettura sui numeri primi e si può verificare che ce n'è uno, sebbene di milioni di cifre, che non la rispetta, la questione è chiusa. Ciò ha scatenato un' incessante ricerca di numeri primi che in alcuni casi è arrivata ad avere carattere talmente competitivo da consegnarla al mondo dei record e dei concorsi. Il numero primo più grande ad oggi scoperto ha oltre 22 milioni di cifre, per leggerlo tutto occorrerebbero giorni e se scritto la sua lunghezza sarebbe di decine di chilometri.
- La seconda è di carattere pratico, ed attiene ad una stretta relazione con le cosiddette chiavi crittografiche: la posta elettronica, le transazioni bancarie, le carte di credito o le comunicazioni per telefonia mobile sono protette da chiavi segrete che si basano direttamente sulle proprietà dei numeri primi.

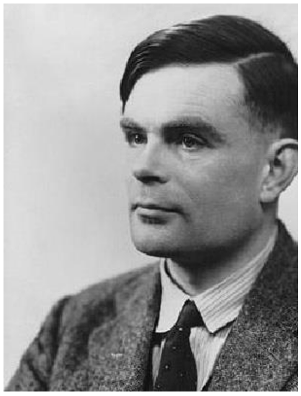
LA MATEMATICA DELLA VITA

La vita è uno dei fenomeni più belli e complessi che esistono sul pianeta. Dall' inizio del XX secolo, si sono scoperti nella biologia tutta una serie di nuovi fenomeni degni di essere trattati e descritti nel linguaggio della matematica.

ORIGINE:

Si può dire che i padri fondatori della biologia matematica sono due: il russo di origine ucraina Nicolas Rashevsky e l'inglese Alan Turing. Vediamo ora nel dettaglio in che modo queste due brillanti menti hanno portato alla nascita di questa disciplina.

- Nicolas Rashevsky nacque a Černigov nel 1899. Per via della rivoluzione bolscevica fu costretto a trasferirsi con la moglie a Chicago, dove sviluppò lavori soprattutto teorici e applicò la teoria degli insiemi e la logica proposizionale alla ricerca sui sistemi biologici. I risultati di Rashevsky non furono però di particolare interesse all'epoca ma diventarono manifesto della biomatematica solo dopo una delle invenzioni più importanti del XX secolo, ovvero il computer.
- Alan Turing, nato a Londra nel 1912, ebbe modo nel 1952 di lavorare sul Ferranti Mark I, il calcolatore più avanzato dell'epoca che era all'università di Manchester. Turing fu tra i primi scienziati ad usare un computer per la trattazione matematica e la simulazione di un sistema biologico. Egli cercava di spiegare come fosse possibile partire da un tessuto omogeneo di cellule tutte simili tra loro per arrivare ad un pattern di strisce (ad esempio nelle zebra); era alla ricerca di quale fosse il meccanismo biologico che portava a tali sequenze. Lui poté utilizzare il computer come se si trattasse di una" provetta da laboratorio", dimostrando che il pattern risultante dipendeva dai valori assegnati ai parametri del modello matematico.



Alan Turing.

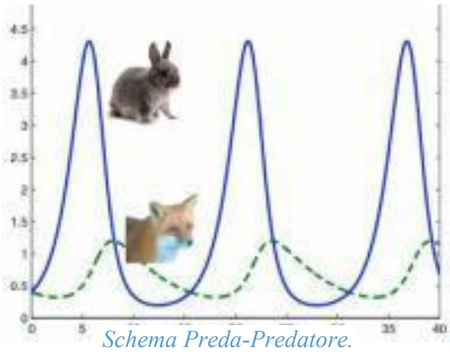
APPLICAZIONI:

La branchia della matematica che permette di studiare la biologia è lo studio delle equazioni differenziali. Tramite una "semplice" equazione differenziale di possono descrivere e analizzare vari modelli matematici, ad esempio:

1. Le equazioni di Lotka - Volterra costituiscono un modello di evoluzione di una coppia di popolazioni interagenti in un dato territorio. Si assume che una delle due popolazioni disponga di una quantità illimitata di cibo (per esempio erba per una popolazione di conigli) mentre l'altra (volpi) si nutra della prima. Un aumento del numero delle prede crea migliori opportunità per i predatori, che iniziano ad aumentare. Questo peggiora le condizioni di vita delle prede, il cui numero diminuisce, peggiorando le condizioni di vita dei predatori. Il modello matematico consiste di due equazioni differenziali:

$$\dot{x}(t) = \big(a * x(t)\big) - \big(b * x(t) * y(t)\big)$$
$$\dot{y}(t) = -\big(c * y(t)\big) + (d * x(t) * y(t))$$

ove x(t) rappresenta il numero di conigli al tempo t
y(t) rappresenta il numero di volpi al tempo t

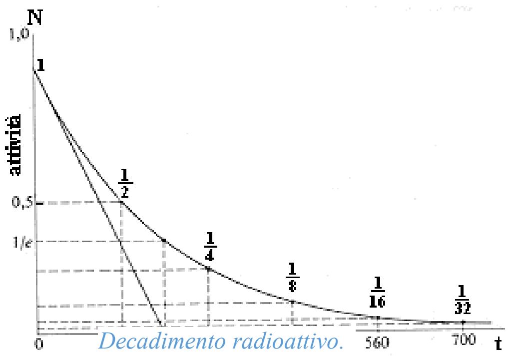


Schema Preda-Predatore.

2. Indicando con N(t) la quantità di materiale radioattivo contenuta in un contenitore, la velocità di decadimento $\dot{N}(t)$ è correlata a N(t) dalla relazione:

$$\dot{N}(t) = N_0 * e^{-\lambda * t}$$

con $\lambda > 0$ e N_0: quantità di materiale radioattivo iniziale

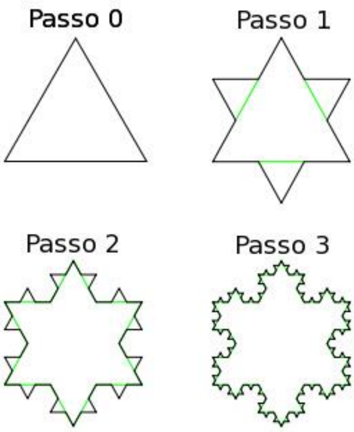


Decadimento radioattivo.

3. L'equazione di Verhulst è un modello che descrive oltre la crescita di popolazioni, anche lo sviluppo di epidemie (ad esempio l'influenza A o l'AIDS) e anche la grandezza delle reti sociali su Internet (ad esempio Facebook) ed ha la seguente espressione:

$$y = \frac{k * y_0}{y_0 + (k - y_0) * e^{-rt}}$$

Infine, se si osservano in natura nubi, montagne, piante, alghe, cristalli, apparato vascolare ed bronchiale, si noterà che vengono tutti ottenuti da un semplice procedimento, ovvero ripetendo di volta in volta una certa sequenza, a prescindere che si tratti di una scala di metri, centimetri o anche millimetri. Queste strutture autosimili sono dette frattali.



A sinistra un cristallo di ghiaccio e a destra il suo frattale, il cristallo di Koch.

Altri esempi di frattali in natura. Si noti il particolare modo di susseguirsi sempre dello stesso pattern.

PI GRECO

Il numero π è il più conosciuto della storia, il più famoso, il più trattato, il più rinomato, il più citato…

STORIA:

π è nato dalla semplice osservazione. Esso è infatti il rapporto fra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro, ovvero:

$$\frac{lunghezza\ di\ una\ circonferenza}{diametro\ della\ stessa} = costante = 3.14159\ ...$$

- 1650 a.C. : il papiro egizio Rhind contiene 87 problemi matematici. Il cinquantesimo dice: "Un campo circolare ha un diametro di 9 khet (1 khet= 50 metri). Qual è la sua area?". La risposta contiene il valore di π=3.160493827.
- 250 a.C: Archimede, una fra le menti più brillanti dell'umanità, stimò che: 223/71=3.140845…<π<22/7=3.142857…
- 170 d.C.: Claudio Tolomeo, con l'utilizzo di un poligono di 120 lati, giunse alla conclusione che π= 3+(17/120)= 377/120=3.141666…
- 1573: il tedesco Valentin Otto, lavorando con poligoni di 393216 lati, usò come approssimazione di π= 355/113=3.1415929…
- 1593: lo studioso olandese Adriaan van Roomen, calcolò 16 cifre esatte di π.
- 1669: con James Gregory, trovare il valore di π non fu più una questione di misurare poligoni, bensì diventò una vera e propria questione matematica. Egli infatti trovò, con 71 decimali corretti, che:

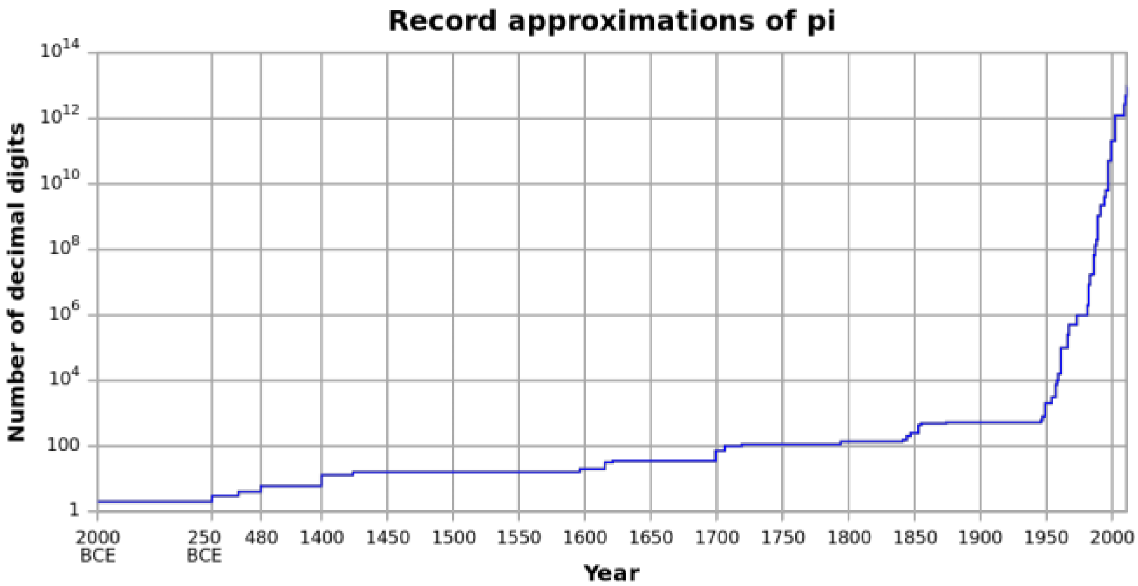
$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k 3^{\frac{1}{2}-k}}{2k+1}$$

- 1794: lo sloveno Jurij Vega calcolò 137 cifre esatte con la seguente formula:

$$\frac{\pi}{4} = 5\ arctan\frac{1}{7} + 2arctan\frac{3}{79}$$

- 1947: Ferguson pubblicò 808 cifre di π: gli ci volle un anno e una calcolatrice. Fu l'ultimo prima di entrare nell'era dei computer. Egli usò la formula:

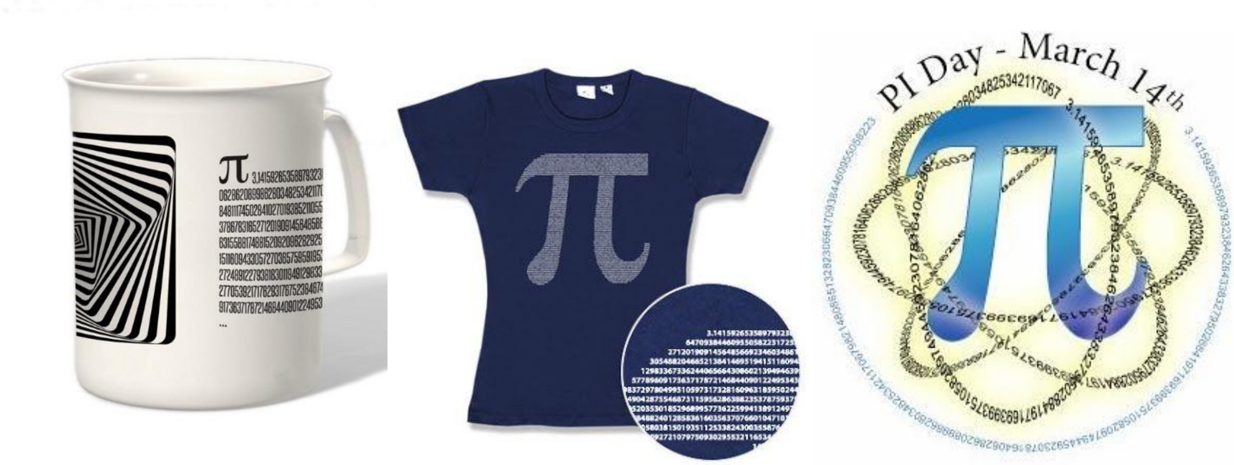
$$\frac{\pi}{4} = 3\ arctan\frac{1}{4} + arctan\frac{1}{20} + arctan\frac{1}{1985}$$



Approssimazioni di Pi nel corso dei secoli.

Curiosità:

- Come mai questo simbolo?
  La denominazione è dovuta a William Jones, che chiamò così la costante nel 1706, dato che la lettera ”p” è la prima della parola “periferia”, che in greco di scrive περιφέρεια.
- Il record mondiale (non ufficiale) della “disciplina” di ricordare a memoria e declamare a voce alta i numeri decimali del Pi greco è stato raggiunto al giapponese Akira Haraguchi che ha recitato 100mila cifre in 16 ore.
- Sommando le prime 20 cifre dopo la virgola si ottiene come risultato 100. Sommando le prime 144 si ottiene 666.
- Esiste un cercatore computerizzato di cifre di π per trovare nella sua espressione decimale la sequenza desiderata fra le prime duecento milioni di cifre. Basta scrivere nel motore di ricerca di Google The Pi searcher e poi, ad esempio, inserire la propria data di nascita.
- È nata una vera e propria Pi Greco mania:



Sono nate delle tazze e delle magliette con lo sviluppo di Pi Greco e persino c’è un PI Day.

INFINITO

“L'infinito è dentro l'uomo, ciascuno lo vede come crede e come ha imparato a rappresentarselo”

John Barrow

Una delle idee che più ha interessato, affascinato, ma anche spaventato l’uomo nel corso della storia è il concetto di infinito. Per infinito si intende tutto ciò che non ha limite in estensione, quantità, durata. La parola stessa lo ammette: in-finito, dove il prefisso ha lo scopo di negare il significato della radice della parola che indica limite.

L’immensità, l’indefinito, l’incommensurabile hanno spesso originato pareri diversi, anche nettamente opposti. Mentre Pitagora vedeva negativamente l’idea di infinito, perché non mostrava regolarità, completezza, armonia, la religione cristiana associò l’infinito a Dio, quindi al divino e alla perfezione. Questa entità è molto difficile da immaginare nel suo complesso: possiamo avere un accenno ammirando un cielo stellato e limpido o solo un piccolo richiamo osservando la distesa del mare fino all’orizzonte: il pittore olandese Van Gogh vedeva l’infinito nelle vaste pianure della Francia. Si incominciò a parlare d’infinito, però, solo in seguito allo sviluppo del pensiero matematico, il quale riuscì a staccarsi dai problemi pratici e raggiunse un livello più astratto e più ampio.

Usando i numeri naturali, possiamo renderci conto dell’infinito, dal momento che è possibile aggiungere un’unità a qualsiasi numero, quante volte desideriamo. Da ciò, deduciamo che i numeri naturali sono come una semiretta: hanno un origine, cioè 0, ma non hanno una fine. Per di più, se digitiamo su una calcolatrice abbastanza potente un numero qualsiasi e lo dividiamo ripetutamente per 2, per 3 o per qualsiasi altro numero, noteremo che anche nel piccolo, esiste un infinito: i cosiddetti infinitesimali.

Finché parliamo di cifre astratte, però, l’infinito rimane immaginario, frutto della genialità umana, ma c’è qualche possibilità che esista veramente nel concreto? Forse nessuno arriverà mai a scoprirlo, ma si accontenterà di ipotizzarlo o di disdirlo. Oggi rappresentiamo l’infinito con un simbolo, ideato dall’inglese John Wallis, vissuto nel XVII sec.: ∞.

L’infinito in epoca antica

Nella Grecia antica il concetto d’infinito fu elaborato dalla filosofia con numerose valenze negative, poiché i Greci ritenevano di poter conoscere solo ciò che fosse determinato e finito. Pertanto, l’infinito non era conoscibile.

Per Aristotele, l’unica idea accettata nell’antichità era *l’infinito potenziale*, inteso come divenire: un numero o una qualsiasi altra quantità, è potenzialmente in grado di tendere all’infinito, aumentandola ogni volta di poco, ma ogni volta risulta un’entità finita. Questo è chiamato processo di eccetterazione. È l’esempio dei numeri naturali: aggiungendo ogni volta un’unità ad un numero, si otterranno ogni volta quantità finite, ma che sembrano potenzialmente in grado di tendere all’infinito. La concezione d’infinito potenziale, però, entrò facilmente in crisi, dando origine a problemi insormontabili e persino a paradossi.

Tornando indietro nel tempo di due secoli, incontriamo il primo Greco che forse ebbe a che fare con

l'infinito: Pitagora di Samo, filosofo e matematico del VI sec. a.C. Egli fondò una scuola, detta appunto Pitagorica, e diede origine ad una sua filosofia e ad una vera e propria religione. Nella sua visione del mondo, tutti gli oggetti erano costituiti da un numero finito di monadi, minuscole particelle, simili agli atomi, che costituivano il sottomultiplo comune a tutti i segmenti. Perciò, due grandezze potevano essere espresse con un numero intero ed erano tra loro commensurabili, ammettevano cioè un comune denominatore, esattamente come 36 e 777 hanno 3 come divisore comune. Ma il pensiero pitagorico fu messo in crisi dalla scoperta di grandezze incommensurabili, ovvero che non ammettono denominatori comuni con altre grandezze e questo fu il primo approccio, non molto gradito, con una forma di infinito attuale.
Attorno al 500 a.C. Zenone di Elea fu artefice di uno dei paradossi più famosi sull'infinito potenziale, in particolare, per dimostrare l'impossibilità del moto, ovvero il celeberrimo paradosso di Achille e la tartaruga.
Segue una delle tante versioni di questo paradosso:
Supponiamo che Achille sia due volte più veloce della tartaruga e che entrambi gareggino su un percorso di un metro. Supponiamo inoltre che Achille dia mezzo metro di vantaggio alla tartaruga.
Quando Achille avrà percorso mezzo metro, la tartaruga si troverà un quarto di metro più avanti; quando Achille avrà percorso un quarto di metro, la tartaruga un ottavo a così via all'infinito: Achille non raggiungerà mai paradossalmente la tartaruga.
Il problema sembra facilmente risolvibile, poiché Achille mantenendo una velocità costante sarebbe comunque arrivato in un tempo determinato non solo alla fine del percorso, ma anche alla tartaruga. Zenone, tuttavia, lasciò irrisolto il paradosso e, in effetti, seguendo il suo ragionamento sembrerebbe che non ci sia alternativa. Ma da questo paradosso sono stati dedotti diversi concetti importanti: innanzitutto, che la somma di infinite quantità infinitesime può risultare finita. Compare, infatti, per la prima volta l'idea di limite, cioè quel numero a cui una serie di numeri tende, cioè si avvicina sempre di più, senza mai raggiungerlo. Il percorso di Achille è costituito da infiniti tratti, ma fermiamoci ai primi cinque e sommiamoli mano a mano:
1/2 + 1/4 = 3/4 ; 3/4 + 1/8 = 7/ 8 ; 7/8 + 1/16 = 17/16; 17/16 + 1/32 = 31/32…
È facile osservare come questa successione tenda ad 1 e sia praticamente uguale ad 1, cioè come si avvicini sempre di più ad 1 senza mai raggiungerlo (3/4; 7/8; 17/16; 31/32; …). Il concetto di limite fu dedotto completamente solo nell'Ottocento e costituisce uno dei punti più curiosi dell'infinito. Compare inoltre il discorso degli infinitesimali, cioè quell'infinito che anziché svilupparsi nel grande, si sviluppa nel piccolo, così come succede per le cifre decimali della radice di 2 e di altri numeri: i tratti del percorso di Achille, infatti, si rimpiccioliscono sempre di più, all'infinito.

L'infinito in epoca moderna

Finita l'epoca buia del Medioevo, si distinsero diverse personalità che contribuirono ad arrivare alla concezione moderna d'infinito. Nel Seicento, il fiorentino Galileo Galilei (1564-1642) considerato il fondatore della scienza moderna, fu uno dei primi scienziati a mettere in discussione il concetto d'infinito elaborato dalla filosofia greca. Egli affermò la possibilità di dividere un segmento in infiniti elementi primi, senza estensione ed indivisibili. Poiché un segmento può essere diviso in tante parti ancora divisibili, si deve necessariamente ammettere che esso sia composto da infinite parti. Ma se queste parti sono infinite devono essere prive di estensione, poiché infinite parti estese hanno un'estensione infinita, mentre il segmento ha un'estensione limitata.

Dal Seicento si sviluppò inoltre il cosiddetto calcolo infinitesimale, che riguardava, cioè, l'infinitamente piccolo. Il primo a compiere un passo decisivo in questa direzione fu Johannes Kepler (1571-1630) che concluse la sua famosa *Nova stereometria doliorum* del 1615, in cui sviluppò le sue considerazioni di tipo infinitesimale per giustificare un criterio empirico usato dai bottai austriaci, con un *Supplementum ad Archimedem*, dove i volumi di alcuni complicati solidi vengono calcolati mediante la suddivisione di essi in un numero (tendente all'infinito) di corpiccioli piccolissimi (al limite infinitesimi).

Un secondo importante passo è compiuto da Bonaventura Cavalieri (1598-1647) che introdusse il famoso metodo degli indivisibili, basato sulla concezione delle linee come insiemi infiniti di punti e, analogamente, delle regioni piane come insieme di linee e dei solidi come insieme di superfici. Egli era convinto che questo metodo, se bene applicato, non potesse condurre ad errori.

Nel Seicento la creazione della geometria analitica ad opera di Cartesio e Fermat condusse ad un radicale ampliamento del concetto di curva e di conseguenza aprì la via al fondamentale problema della ricerca delle tangenti ad una curva generica.

Mentre le ricerche dirette a determinare tangenti, punti di massimo o di minimo, velocità istantanee ed accelerazioni istantanee fanno parte del calcolo differenziale, quelle volte a determinare lunghezze, aree e volumi fanno parte del calcolo integrale. Cosa sono esattamente questi due tipi di calcoli?

Il *calcolo differenziale* si occupa dello studio delle variazioni delle funzioni a una o più variabili. Siano x e y due variabili legate dalla relazione $y = f(x)$, dove f è una funzione che indica in che modo il valore di y (variabile dipendente) dipenda da x (variabile indipendente). Ad esempio, x potrebbe rappresentare la variabile temporale e y lo spazio percorso da un corpo in moto nel tempo x.

Il *calcolo integrale*, invece, riguarda l'integrazione, cioè l'operazione inversa rispetto alla differenziazione. Data una funzione f, lo scopo dell'integrazione è trovare una funzione F la cui derivata sia f, cioè $F' = f$; la funzione F si dice integrale, o primitiva di f. Questo calcolo serve appunto a determinare aree e volumi di figura o solido geometrici costituiti da qualsiasi tipo di curva.

Il merito di avere chiarito il rapporto tra questi due tipi di calcoli spetta a Newton e Leibniz, i quali vennero considerati gli " inventori " dell'analisi infinitesimale, cioè del calcolo differenziale e del calcolo integrale.

Isaac Newton (1642-1727) elaborò il suo nuovo calcolo, chiamato calcolo delle flussioni, quando era poco più che ventenne, ma non pubblicò che parecchi anni più tardi gli scritti dedicati all'esposizione delle proprie idee sull'argomento. Newton enunciò le principali regole di derivazione e quelle di integrazione, a determinare con esattezza il legame che intercede fra i due calcoli, ad impostare e risolvere alcune equazioni differenziali, a farne numerose applicazioni alla geometria ed alla meccanica, ma i termini con cui si esprimeva mancavano di chiarezza e semplicità.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) cominciò ad interessarsi di analisi infinitesimale nel 1672 e poco dopo ebbe occasione di entrare in contatto con l'ambiente dei matematici inglesi (incluso lo stesso

Newton), contatto che lo stimolò a proseguire ed approfondire questo genere di indagini. Egli riscoprì da sé il calcolo infinitesimale, ma, a differenza di Newton, seppe esprimersi in un linguaggio più chiaro e maneggevole. Egli, infatti, definì "derivate" le famose "flussioni" di Newton e "integrali" le "fluenti", sempre di Newton. Questa su chiarezza e semplicità non riguardò solamente le denominazioni usate, ma soprattutto l'introduzione degli indivisibili, che evitavano i lunghi giri di parole e formule di Newton. Con la lettera *d*, da leggersi "de", indicò questi indivisibili dello spazio, o differenziali, enti privi di estensione.

L'indiscutibile successo conseguito dalla formulazione leibniziana dell'analisi infinitesimale non fu esente da inconvenienti, in quanto favorì una certa confusione fra l'algebra degli infinitesimi e l'algebra delle grandezze finite, a tutto danno di una trattazione rigorosa dell'importante argomento. Solo nell'Ottocento i problemi ad esso connessi vennero notevolmente chiariti con la dimostrazione che tutta l'analisi infinitesimale classica si fonda sul concetto di limite e da essi deriva immediatamente quello di infinitesimo, ovvero ogni variabile numerica tendente allo zero.

Con il XIX secolo, sembrava conclusa la questione sul concetto d'infinito, ma non finì qui. Finora, infatti, l'infinito attuale non era stato considerato con tutto rispetto, ma semplicemente come un numero grandissimo o piccolissimo. A rivoluzionare la visione d'infinito, fu, quindi, George Cantor. Egli prese in considerazione l'infinito nella sua totalità, ma la vera rivoluzione fu l'introduzione di *ordini* di infinito, idea assolutamente assurda per l'epoca, poiché fino ad allora si riteneva di non potersi spingere oltre l'infinito.
Innanzitutto, Cantor definì un insieme infinito *numerabile*, se poteva essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali. Prese dapprima in esame insiemi infiniti cosiddetti discreti, ovvero con intervalli tra un elemento e l'altro, e li riconobbe numerabili. Sono insiemi numerabili discreti i numeri pari, i numeri dispari, i quadrati, i numeri primi. Ma nel 1974, dimostrò che anche insiemi infiniti densi, tra i cui elementi, cioè, ne esistono altri, sono numerabili. È il caso dell'insieme dei numeri razionali, cioè quei numeri esprimibili con una frazione, ovvero con un rapporto tra numeri interi. Cantor riuscì a trovare un metodo per ordinare in maniera sistematica tutti i numeri razionali.
Arrivò così a dedurre che anche un insieme denso come quello dei numeri razionali fosse numerabile. Ma non tutti gli insiemi infiniti sono numerabili nel modo in cui intendeva Cantor, cioè ordinando in modo definito gli elementi e ponendoli in rapporto 1:1 con l'insieme dei numeri naturali. Tra questi insiemi non numerabili, c'è l'insieme dei numeri reali, formato dai numeri razionali ed irrazionali.
Nel 1972, Richard Dedekind scrisse un trattato sui numeri irrazionali, in cui affermò che i numeri razionali, per quanto siano densi, non costituiscono un continuo, ma ammettono dei "buchi", che non sono altro che gli irrazionali, cioè quei numeri non esprimibili con una frazione, come radice di 2. Cantor si rese conto che esistevano sempre nuovi numeri tra due elementi dell'insieme reale, infinitamente piccoli. Questo insieme è paragonabile ad una retta geometrica, in cui tra due punti ne esiste sempre un terzo e che ha, come disse Cantor stesso, lo stesso numero di punti di un qualsiasi segmento. Con Cantor sembrò veramente concluso il tentativo di chiarire in assoluto in concetto di infinito.