IL GUSTO DELLA MATEMATICA

Corso di Comunicazione della Scienza
AA. 2014/2015

Morena Celant, Ilaria Fanelli, Elena Peterle

2 giugno 2015

Indice

1 Introduzione **3**

1.1 Metodi di lavoro 4

1.2 Questionario 5

2 Il menù **7**

3 Aperitivo **9**

3.1 Paraboloidi iperbolici e triangoli sferici 9

3.2 Pagnotte esagonali 11

4 Primi Piatti **13**

4.1 Elicoide saporito 13

4.2 Tortelloni farciti ai frattali 16

5 Secondi Piatti **19**

5.1 Rapporti complicati: superficie/volume 19

5.2 Lente spirali all'aglio 22

6 Dolci **24**

6.1 Crostatina di Fibonacci 24

6.2 Rodonea profumata 26

6.3 Toro in zucchero vanigliato 27

7 Vino **29**

7.1 Vino in bottiglia di Klein 29

8 Conclusioni **31**

Bibliografia **32**

Non si può pensare bene, amare bene, dormire bene
se non si ha mangiato bene
Virginia Woolf

Capitolo 1

Introduzione

Per un lancio di dadi che non comprendo, mi ritrovo da sempre affezionato alla matematica.

Abbiamo deciso di iniziare la nostra relazione con questa citazione di Robert Ghattas perchè anche noi, come l'autore, siamo da sempre attratte dalla matematica. Molte persone hanno un rapporto difficile con questa disciplina, vedendola come qualcosa di incomprensibile e troppo astratto, senza nessun riscontro nella realtà. Con questo progetto, ci piacerebbe mostrare loro un ambito concreto dove trovare la matematica: il cibo.
La cucina è uno dei posti dove meno ci si aspetterebbe di trovare la matematica, fatta eccezione forse per qualche dato numerico nelle ricette: quattro uova, due cucchiai di farina, o tutt'al più quando dalle dosi per quattro persone si devono calcolare quelle per tre o sette. Al di là di questo sembrerebbe che la matematica non abbia diritto di cittadinanza: la cucina è il luogo dei profumi e dei sapori, e non c'è posto per numeri o formule.

Considerato il fatto che il 2015 è l'anno dell'Expo in Italia, evento mondiale che coinvolgerà milioni di persone e che ha come tema il cibo, abbiamo pensato ad esso come mezzo di divulgazione della matematica ad un pubblico vario, per età, nazionalità ed istruzione. A tale scopo, ci siamo cimentate nella creazione di un menù che potrebbe essere ipoteticamente utilizzato da un ristorante proprio all'interno di questo evento.

Il titolo da noi scelto è *Il gusto della matematica*: gusto, poichè vogliamo dar la possibilità di assaporare qualche aspetto curioso della materia attraverso la degustazione dei piatti proposti, gusto, perchè per noi è un piacere poter condividere e trasmettere gli aspetti affascinanti della matematica.

1.1 Metodi di lavoro

Partire con il piede giusto: prima di progettare il nostro menù, abbiamo letto un capitolo del libro *Comunicare la scienza, kit di sopravvivenza per ricercatori*, per individuare il modo migliore di comunicare i concetti che abbiamo cercato di illustrare.

Sviluppata l'idea iniziale, abbiamo fatto qualche ricerca consultando vari siti web e libri, dai quali abbiamo potuto scegliere quali alimenti legare ad argomenti matematici, per un menù completo dall'aperitivo al dolce.

Una volta scelti i temi da sviluppare, ci siamo divise il lavoro per fare ricerche approfondite ed accurate e, confrontandoci circa una volta a settimana, abbiamo esaminato il materiale trovato e poi discusso sui punti da chiarire e sui miglioramenti da attuare. Per rimanere nell'ottica della collaborazione di gruppo, abbiamo creato inoltre un gruppo chiuso su Facebook per agevolare la condivisione di idee in qualsiasi momento.

Per arricchire il progetto, abbiamo contattato André Sudarovich, chef della Val di Fassa, che cura la cucina dell'Active Hotel Olympic il quale, durante l'estate scorsa, ha seguito gli aspetti culinari di alcuni aperitivi matematici legati alla mostra *Matematica, Arte e Natura*, organizzata dagli studenti dell'Istituto d'arte della Scola Ladina di Pozza di Fassa, con la consulenza di Italo Tamanini ed Ester Dalvit del Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento. Lo chef ci ha suggerito alcuni stuzzichini da lui proposti nei sopra citati aperitivi; ci ha portato d'esempio due delle sue invenzioni: l'elisir alla pigna di Fibonacci e il rettangolo aureo di pizza.

Inoltre, per dare validità al nostro menù e renderlo originale, abbiamo chiesto aiuto alla *Locanda San Lorenzo* di Puos d'Alpago(BL), ristorante stellato caratteristico per l'enogastronomia bellunese. In particolare, lo chef Renzo Dal Farra ci ha consigliato i piatti da lui creati che meglio si potevano legare ai cibi che avevamo scelto e ce li ha gentilmente fotografati.

Prima di cominciare la stesura del progetto, ci siamo soffermate sulla scelta del pubblico a cui rivolgere il nostro menù; dato che un ristorante è frequentato da un'ampia clientela, per età e istruzione, ci siamo poste l'obbiettivo di riuscire a comunicare difficili nozioni in modo semplice, senza utilizzare concetti troppo specifici; perciò, le spiegazioni sono volutamente lineari, brevi, scherzose. In questo modo, diamo solo piccoli assaggi degli argomenti trattati, che potrebbero essere approfonditi qualora il menù fosse presentato in una serata a tema.

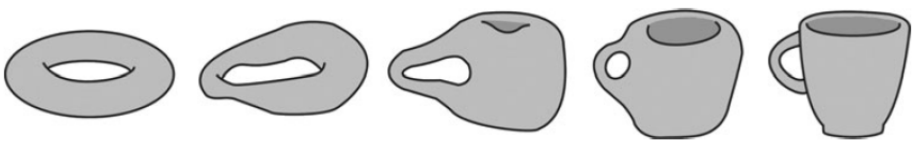
1.2 Questionario

La prima difficoltà che abbiamo incontrato è stata proprio quella di comunicare nozioni tecniche, a noi familiari, in modo semplice e comprensibile. Si è sviluppata quindi l'idea di sottoporre ad un piccolo gruppo di persone, tra le quali amici, parenti, compagni di università, ma anche clienti del ristorante sopra citato, il nostro menù con allegato un questionario. Quest'ultimo ci ha consentito di apportare modifiche e miglioramenti al nostro lavoro.

Abbiamo intervistato circa una cinquantina di persone, di varie età; le abbiamo raggruppate in cinque gruppi, ognuno contenente circa lo stesso numero di persone. Il primo comprende ragazzi delle scuole medie e superiori, il secondo giovani tra i 18 e 30 anni, il terzo persone tra i 30 e i 50, il quarto tra i 50 e i 70 ed infine l'ultimo con persone over 70.

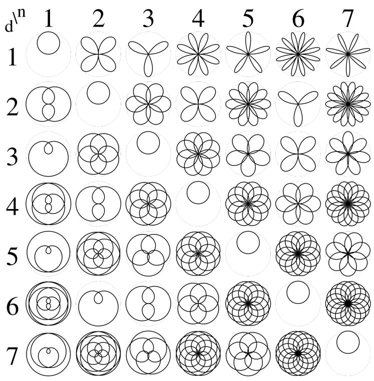
Abbiamo impostato il questionario in tre sezioni, riguardanti il modo e l'efficacia con cui abbiamo trattato gli argomenti, le immagini utilizzate ed infine l'interesse suscitato dai temi trattati.

Per quanto riguarda il modo e l'efficacia delle spiegazioni, abbiamo chiesto se fossero sufficientemente semplici e comprensibili, se avessero incuriosito, se fossero troppo lunghe/sintetiche ed infine quali punti non fossero chiari. I riscontri sono stati positivi: complessivamente il menù ha suscitato interesse, la lettura era semplice e leggera, grazie soprattutto a frasi brevi, simpatiche, che colpivano l'attenzione del lettore. Ciò nonostante, ci sono state fatte delle critiche in merito ad alcune parti, che risultavano talvolta troppo difficili, talvolta troppo facili, quasi banali. In merito alle prime, abbiamo apportato delle modifiche sia alla forma che al concetto matematico. Per esempio, avevamo aggiunto, per concludere il menù in modo esaustivo, una parte riguardante il caffè, dove spiegavamo il senso della topologia mostrando come la tazzina del caffè e la ciambella, citata nella sezione dei dolci, fossero omeomorfe.



I lettori hanno trovato noioso e superfluo l'argomento, quindi abbiamo pensato di togliere questa sezione, cercando di spiegare il medesimo concetto nella parte dedicata al toro. In merito alle parti ritenute più facili, i lettori hanno osservato che le spiegazioni erano poco esaustive e superficiali. Non abbiamo però tenuto in considerazione queste critiche, in quanto il nostro scopo è quello di raggiungere un vasto pubblico, che comprende dai ragazzi alle persone anziane, che potrebbero non conoscere concetti per noi usuali.

Le immagini sono sembrate utili, talvolta indispensabili, per la comprensione dell'argomento. Hanno reso la lettura scorrevole, piacevole e divertente. Abbiamo scelto infatti di inserire alcune immagini tratte da alcuni film d'animazione per catturare l'attenzione del lettore. Anche in questo caso, abbiamo apportato delle modifiche; avevamo inserito una figura riguardante la rodonea poco chiara, troppo complicata rispetto alla spiegazione fornita.



Nell'ultima parte del questionario, ci siamo soffermate sull'interesse che un menù così particolare può suscitare. I lettori sono rimasti stupiti dal fatto che la matematica sia così presente nella vita di tutti i giorni e perchè no, anche divertente. Hanno apprezzato l'idea di poter trovare un menù di questo tipo in un ristorante, lo leggerebbero interessati.

Gli argomenti che più hanno colpito sono stati l'ananas con la successione di Fibonacci e il broccolo con i frattali, probabilmente perchè è *una matematica* sotto gli occhi di tutti, ma allo stesso tempo così nascosta se nessuno la fa notare. Chi ha letto il nostro questionario ci ha confessato di voler al più presto verificare quante sono le spire dell'ananas o come è composto un broccolo. L'argomento che meno ha interessato, invece, è stato il toro; probabilmente è un concetto più astratto, più difficile da capire leggendo una breve spiegazione e che meraviglia sicuramente meno rispetto gli argomenti precedenti.

Tra i consigli che ci sono stati proposti, il più significativo ci è sembrato quello di organizzare una serata a tema; in tale occasione, il nostro menù potrebbe essere accompagnato da spiegazioni più approfondite, illustrate da una persona competente in materia, in grado di rispondere ad eventuali domande o curiosità.

Capitolo 2

Il menù

APERITIVO

PARABOLOIDI IPERBOLICI E TRIANGOLI SFERICI
Pringles e tortillas con salse varie
PAGNOTTE ESAGONALI
Morbide e soffici focaccine di patate

PRIMI PIATTI

ELICOIDE SAPORITO
Fusilli con pesto di menta e mandorle, zucchine e straccetti di Parma
TORTELLONI FARCITI AI FRATTALI
Tortelloni di broccolo romano e salsiccia di Soverzene con crema di ricotta

SECONDI PIATTI

RAPPORTI COMPLICATI: SUPERFICIE/VOLUME
Fettine di polpettone di tacchino in salsa di vino
o
Polpettine di salsiccia con salsa piccante
Contorni misti di stagione
LENTE SPIRALI ALL'AGLIO
Lumache croccanti con salsa ai due agli

DOLCI

CROSTATINA DI FIBONACCI
Crostatina con marmellata di ananas e rosmarino
RODONEA PROFUMATA

Torta di rose
TORO IN ZUCCHERO VANIGLIATO
Ciambelline fritte su crema chantilly

VINO

VINI IN BOTTIGLIA DI KLEIN

Capitolo 3

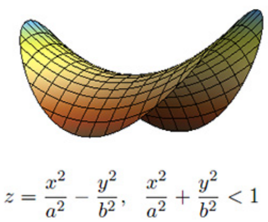
Aperitivo

3.1 Paraboloidi iperbolici e triangoli sferici

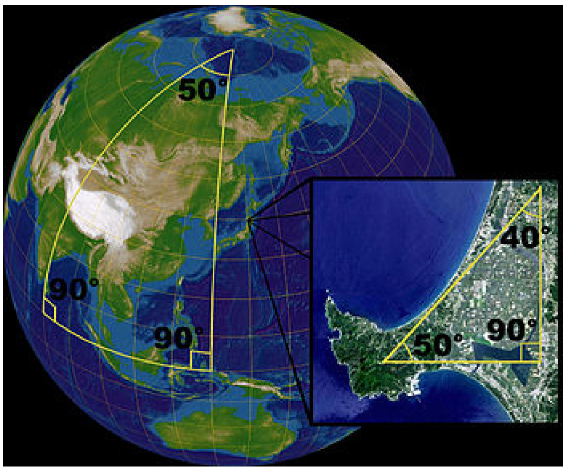
Le patatine di questo noto marchio americano sono uno degli spuntini più conosciuti al mondo. Sono consumate da miliardi di persone che sicuramente non si sono mai soffermate sull'aspetto matematico della loro forma; sono infatti dei paraboloidi iperbolici. Alcuni suppongono che tale forma, sin da quando è stata inventata nel 1956, si adatta meglio al palato. In altre fonti, invece, si fanno risalire queste patatine alla seconda guerra mondiale, durante la quale venivano gustate come snack dai soldati dell'esercito americano, anche se non erano al momento in commercio.

Con questo stuzzichino, abbiamo voluto mostrare una superficie geometrica che tutti almeno una volta nella vita hanno assaggiato, ma se dovessero incontrarla in vesti matematiche, non la saprebbero riconoscere. Anche noi, quando per la prima volta abbiamo studiato il paraboloide iperbolico, non siamo riuscite a visualizzarlo finchè non ci è stato presentato proprio come la pringles. Come accennato, il paraboloide è una superficie geometrica; viene detto iperbolico poiché le sezioni orizzontali sono delle iperboli mentre quelle verticali sono delle parabole. La sua equazione è data da:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{z}{c}$$



Ecco un'altra patatina, questa volta di origine messicana: la *Tortilla*. Abbiamo inserito nel nostro menù questo stuzzichino per dare un assaggio ai lettori di come possa essere importante la geometria per la vita di tutti i giorni: in questo caso particolare, per la navigazione terrestre. A tal proposito, abbiamo riflettuto sul fatto che comunemente si pensa che, per tracciare le rotte delle navi, si abbia bisogno di una linea retta tra il luogo di partenza e il luogo di arrivo; siamo infatti abituati a vedere la terra su cartine piane. Ma non è così: essa è una sfera con i poli schiacciati, e quindi, per poter disegnare su di essa le rotte o misurare le distanze, serve una geometria diversa da quella usata nel piano, che tenga conto della curvatura della superficie terrestre. Si tratta della geometria sferica, una geometria non euclidea ideata da Bernhard Riemann, costruita sulla superficie di una sfera.

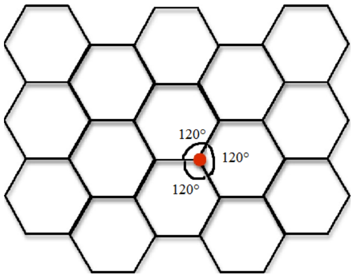


3.2 Pagnotte esagonali

Non so se mai, ma stavolta effettivamente Gianni non vedeva altro; o meglio, vedeva una specie di pavimentazione a esagoni, questo sì, ma non la trovava particolarmente eccitante, specie in relazione con le focaccine. [...] Il meccanismo con cui si formano questi esagoni è piuttosto interessante e c'entra un sacco di matematica di alta qualità.

Il passo è tratto dal libro *La matematica in cucina* di Enrico Giusti, matematico italiano, che attualmente si occupa soprattutto di promuovere e gestire Il Giardino di Archimede, il primo museo in assoluto completamente dedicato alla matematica e alle sue applicazioni. Nel libro, i due protagonisti sono Gianni, un letterato amante della cucina, e Pinotto, un matematico, i quali discutono di vari temi e utensili che si trovano in cucina, cercando di svelare i sotterranei matematici di essa. In particolare, nel capitolo *Focaccia per pane*, trattano della forma di alcune focaccine mal riuscite perchè si sono attaccate e hanno in qualche modo tassellato la piastra del forno in cui erano riposte.

Consideriamo due dischetti di pasta per focaccia, contenenti un po' troppo lievito; poniamoli in una teglia, sufficientemente vicini; nel processo di lievitazione, a un certo punto, le due focacce si toccano, spingendo l'una contro l'altra. La parte in cui sono in contatto è una linea retta, e rimane tale, anche se le focacce continuano a lievitare; il resto del bordo rimane a forma di circonferenza. Lo stesso succede se nella teglia poniamo un numero maggiore di focacce. Le regioni interne saranno tutte separate da linee rette, quelle esterne avranno una parte del bordo che è un arco di circonferenza. Le linee che separano le regioni interne formano tra loro degli angoli di 120^o; infatti, nei punti in cui si incontrano tre linee, queste devono formare tre angoli uguali, di conseguenza ognuno avrà ampiezza 120^o. Quando il numero delle regioni diventa molto grande, le regioni interne tendono a diventare esagoni regolari.



E' necessario spiegare ora perchè le regioni assumono proprio forma esagonale. Essa è la configurazione ottimale per avere minor perimetro possibile, in modo tale che una stessa curva possa servire da bordo a due. Si tratta di un problema isoperimetrico, trovare quelle forme che a parità di area minimizzano il perimetro. Tale problema viene citato nella sezione *Rapporti complicati: Superficie Volume.*

Si dicono tassellazioni o tassellature del piano i modi di ricoprire il piano con una o più figure geometriche ripetute all'infinito senza sovrapposizioni.

In questa parte, volevamo soffermare l'attenzione dei lettori sul fatto che una tale configurazione, che si può ottenere semplicemente ai fornelli, o spiegare matematicamente con teoremi e dimostrazioni, è quella utilizzata intelligentemente anche dalle api. La difficile matematica studiata sui libri è ancora una volta un modo per spiegare la natura che ci circonda. *Così si scopre che le api o le vespe sanno più matematica dei matematici, o quanto meno che utilizzano istintivamente le configurazioni migliori, e quindi dovendo costruire un nido di cellette tutte uguali cercano di farlo nel modo più economico possibile.* Le api in natura costruiscono i favi dove depositano, in celle, il raccolto e allevano la covata. La costruzione avviene con cera fluida prodotta dalle api che viene secreta da otto piccole ghiandole situate sotto l'addome. Un favo è composto di due facce con celle a sezione esagonale, che è proprio la forma che permette di risparmiare cera.

Capitolo 4

Primi Piatti

4.1 Elicoide saporito

Corta o lunga, al dente o scotta, ognuno in fatto di pasta ha le proprie preferenze, ma raramente ci si chiede cosa ci sia dietro ad ogni suo formato. Quest'ultimo non è solo un fattore estetico, ma è di notevole importanza per una buona cottura ed anche per il rapporto con il sugo.

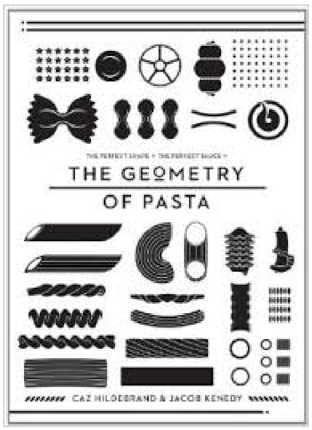
Importante per la cottura sarà lo spessore: quanto tempo impiega il calore ad entrare fino nel cuore della pasta? Se lo spessore è uniforme e non troppo alto, tutta la pasta sarà ben cotta; se non è uniforme, ci saranno delle parti più cotte, altre più al dente. Inoltre, sempre in merito allo spessore, non dovrà essere troppo alto per questioni di assorbimento dell'acqua, la quale ammorbidisce la pasta durante la cottura. Si è individuato uno spessore critico, massimo, di 1 mm. Esiste uno spaghetto con diametro maggiore di un millimetro? No, non si parla più di spaghetto, ma di bucatino, che è uno spaghetto bucato, con forma di cilindro coassiale, con un piccolo cilindro vuoto all'interno; in questo modo, ci sono due superfici di assorbimento per l'acqua, una interna e una esterna, le quali permettono una giusta cottura omogenea.

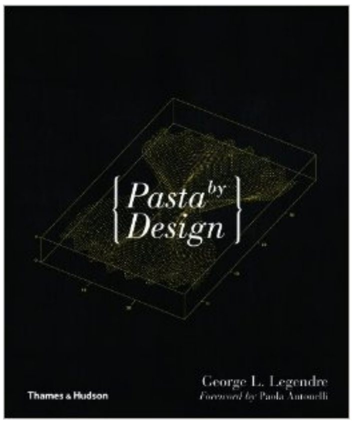
Riguardo al sugo, invece, importante sarà l'adesione superficiale. Per esempio, se il condimento contiene grossi granuli, serviranno dei solchi nella pasta. Se invece il rapporto superficie/volume della pasta è piccolo, un sugo fine non andrà bene perchè non lega a sufficienza.

Bisogna inoltre osservare la superficie microscopica: in generale, la pasta con superficie liscia presenta tempi di cottura lunghi, regolarità nel formato, poca aderenza per i sughi; al contrario, le superfici rugose hanno tempi di cottura più brevi, presentano delle fluttuazioni, ma offrono maggiore aderenza per le salse e i condimenti. Infine, le paste trafilate al bronzo sono ottime per assorbire i sughi, anche quelli fini o più liquidi, ma hanno una cottura difficile.

Il formato della pasta si può tradurre in un'equazione, dalla forma alla formula, intuizione avuta dal fisico Sander Huisman, che studia presso l'Università di Twente, nei Paesi Bassi. *Gioco molto con Mathematica - e un giorno, mentre mangiavo della pasta, mi è venuto da domandarmi quanto sarebbe stato facile ricreare quelle forme con il programma del computer.* Inizialmente riuscì a scrivere la formula per una decina di formati di pasta.

Si possono trovare altri due casi di classificazione dei formati di pasta. Il primo, nel libro *The geometry of pasta*, del graphic designer Caz Hildebrand e dello chef Jacob Kenedy, nel quale le pagine ricche di illustrazioni mostrano la pasta come elemento grafico in successioni vettoriali bicolori, che ricordano i diversi formati della pasta comune in modo stilizzato. Il secondo, in *Pasta by design*, scritto da due architetti, Marco Guarnieri e George L. Legendre, è un libro di 208 pagine in cui vengono elencati 92 tipi di pasta, suddivisi in base a una sorta di albero genealogico che ne traccia l'evoluzione. Ciascun tipo è accompagnato da un'equazione matematica, un'immagine stuzzicante e un paragrafo di consigli a carattere culinario. *Quello della pasta è un universo speculare in cui tutto è flessuoso e cedevole*, spiega Legendre. Due viaggi grafico-gastronomico nel cibo più italiano che ci sia.

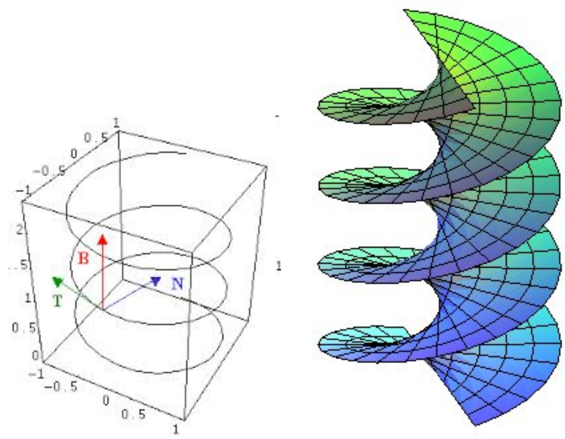




Abbiamo pensato di soffermarci sul formato dei comuni fusilli, che in termini matematici possiamo definire come un elicoide rigato. La scelta di analizzare soltanto questo formato di pasta è stata dettata dal fatto che, da un lato è molto comune, dall'altro ci permette di spiegare una superficie geometrica non così conosciuta.

Un elicoide è una superficie invariante per tutti gli avvitamenti rispetto a un asse, con passo fissato, ovvero per tutti i movimenti rigidi composti da una traslazione lungo l'asse e una rotazione intorno alla stessa aventi rapporto fissato. Ogni elicoide può essere generato dal movimento rigido elicoidale di una curva.

Un caso particolare è l'elicoide rigato. Una superficie rigata è una superficie generata dall'unione di infinite rette. In questo caso, si tratta appunto del movimento elicoidale di una retta. In particolare, quando la retta è perpendicolare all'asse, si ha un elicoide retto. Le intersezioni di un elicoide con dei cilindri aventi lo stesso asse sono eliche con lo stesso passo dell'elicoide.



In coordinate cilindriche, l'elicoide è dato da

$$z = c\theta \tag{4.1}$$

In coordinate cartesiane è dato da

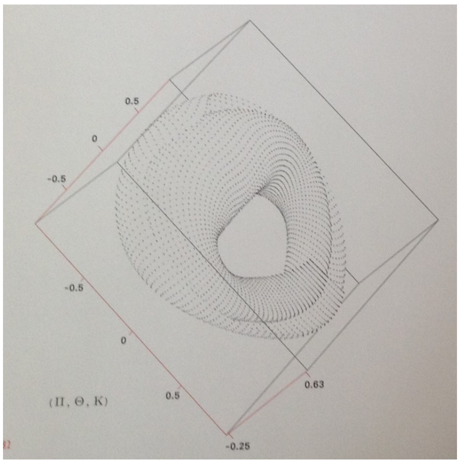
$$\frac{y}{x} = tan(\frac{z}{c}) \tag{4.2}$$

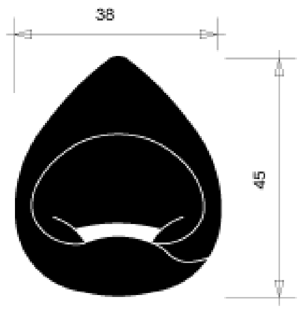
Infine, in forma parametrica è

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v \end{cases} \tag{4.3}$$

4.2 Tortelloni farciti ai frattali

Come per i fusilli, anche per i tortelloni abbiamo analizzato le schede dei libri sopra citati. Ecco le immagini che abbiamo tratto da essi.





Il tortellone è un tipo di pasta ripiena simile al tortellino, ma più grande, costruito partendo da una forma di pasta quadrata o circolare, poi piegata e chiusa. Vengono serviti su una crema, o con burro e salvia, o con un leggero sugo di pomodoro. Si preferisce un ripieno non di carne, il cui sapore coprirebbe troppo quello della pasta, ma piuttosto di zucca, ricotta e spinaci, asparagi, o come nel nostro caso, broccoli.

E' proprio sul broccolo romano che ci siamo soffermate: che forma insolita e particolare! Questo ortaggio è uno degli esempi in natura più chiari di geometria frattale.

Ricordiamo che in passato i Greci hanno inventato le coniche tagliando coni o cilindri per puro gioco intellettuale. Più tardi, Keplero giunge alla conclusione che l'orbita percorsa dal pianeta Marte è ellittica, e Galileo scopre che i gravi cadono seguendo una traiettoria parabolica. Quest'ultimo proclama che il grande libro della natura è scritto in caratteri matematici; questi caratteri sono triangoli, cerchi e altre figure geometriche.

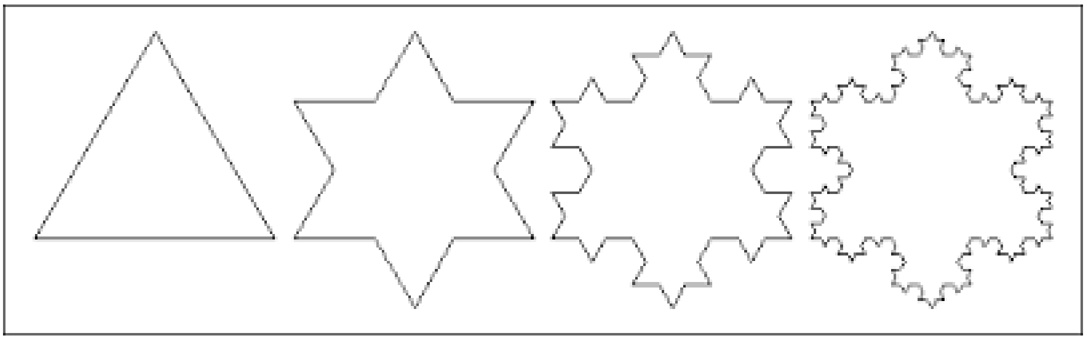
Benoit Mandelbrot, vissuto nel secolo scorso, ha rivoluzionato il modo di pensare la natura come luogo dove trovare forme perfette. Lui stesso ha coniato il termine *frattale*, che si trova per la prima volta nel libro *Gli oggetti frattali: forma caso e dimensione* pubblicato nel 1985. Il matematico polacco nota che le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, le coste non sono cerchi e la corteccia non è liscia, nemmeno la traiettoria del lampo va in linea retta. E' così, osservando la natura, che Mandelbrot sviluppa la teoria frattale.

Un frattale è un oggetto geometrico che si ripete nella sua struttura allo stesso modo su scale diverse, ovvero che non cambia aspetto anche se visto con una lente d'ingrandimento.

L'esempio preferito di figura frattale di Mandelbrot, come sottolineato in precedenza, è il broccolo romanesco, proprio la base del nostro piatto! Lui stesso sosteneva che questo piccolo ortaggio può sollevare profondi interrogativi in matematica, a causa della sua forma sorprendente: staccando uno dei rami principali si nota che il nuovo pezzo presenta la stessa struttura della totalità. Ognuno dei pezzi principali, a sua volta, può essere diviso in rami sempre più piccoli, conservando la proprietà dell'auto-similarità. Quest'ultima è ciò che caratterizza i frattali ed è la proprietà per cui un intero assomiglia ad una parte di se stesso. A qualunque scala si osservi, un frattale presenta sempre gli stessi caratteri globali.

Matematicamente parlando, la sostanziale differenza tra un oggetto euclideo e un frattale è il modo in cui si costruisce. Una curva piana, infatti, si costruisce generalmente sul piano cartesiano, utilizzando una funzione del tipo $f(x(t), y(t)) = 0$,che descrive la posizione del punto sulla curva al variare del tempo t. La costruzione dei frattali, invece, non si basa su un'equazione, ma su un algoritmo. Ciò significa che si è in presenza di un metodo, non necessariamente numerico, che deve essere utilizzato per disegnare la curva. Inoltre, l'algoritmo non è mai applicato una volta sola, ma la procedura è iterata un numero di volte teoricamente infinito: ad ogni iterazione, la curva si avvicina sempre più al risultato finale e, dopo un certo numero di iterazioni, l'occhio umano non è più in grado di distinguere le modifiche. Pertanto, quando si disegna concretamente un frattale, ci si può fermare dopo un congruo numero di iterazioni.

Uno degli esempi più famosi di frattale, di cui è possibile spiegare facilmente l'algoritmo, è il *Fiocco di Koch*. La costruzione di questo parte da un triangolo equilatero. Ogni lato viene diviso in tre segmenti uguali; quello centrale diventa la base di un altro triangolo equilatero, ottenendo una stella a sei punte. Nel rispetto del principio di auto-similarità, si prosegue con la stessa tecnica: ogni segmento viene diviso in tre segmenti uguali e su ognuno dei tre segmenti centrali si costruisce un nuovo triangolo equilatero. Si può procedere fino all'infinito, ma come sottolineato in precedenza, l'occhio umano non avrà più le capacità di distinguere i cambiamenti.



E così succede anche per il broccolo: immaginiamo di avere un broccolo perfetto. Solo se avessimo delle mani precisissime e una vista acuta, anche dopo un elevato numero di passaggi, staccando ogni volta un pezzettino più piccolo, riusciremmo a notare la similarità della forma dei pezzettini, ormai minuscoli, con il broccolo da cui siamo partiti. Questa particolare struttura rende difficile anche la cottura di questo ortaggio. Infatti, se lo volessimo lessare in acqua bollente dovremmo tagliarlo in piccoli pezzi, e ciò nonostante le punte risulterebbero stracotte mentre l'interno rimarrebbe sempre in parte crudo. La cottura ottimale è quella al microonde: le sue onde infatti penetrano in profondità, anche di qualche centimetro, rendendo il broccolo cotto uniformemente.

Capitolo 5

Secondi Piatti

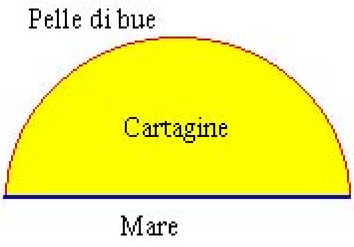
5.1 Rapporti complicati: superficie/volume

Per questo secondo piatto a base di carne, abbiamo pensato di lasciar scegliere al cliente tra due proposte: fettine di polpettone di tacchino in salsa di vino o polpettine di salsiccia con salsa piccante. Con questa doppia scelta, vogliamo mettere in evidenza l'importanza del rapporto volume/superficie nella cottura della carne.

Polpettone o polpettine? Il tempo impiegato per una buona cottura della carne è proporzionale al rapporto $\frac{Volume}{Superficie}$. Quindi, se avessimo poco tempo, sarebbe più conveniente scegliere dal menù le polpettine perchè hanno più superficie in proporzione al peso e quindi assorbono più calore, mentre il polpettone presenta una cottura più lunga. Il medesimo discorso potremmo farlo con altri due tipi di carne: rollè o roast-beef? Il primo cuoce prima perchè la parte all'interno è più vicina alla superficie, quindi il calore ci arriva prima; nel roast-beef, invece, ci sono parti molto lontane dalla superficie, e lì il calore arriva poco e restano al sangue.

Troviamo dei riferimenti alla cottura della carne nel libro *La matematica in cucina*, sopra citato; in particolare, il discorso riguardante la cottura della carne viene inserito nel capitolo intitolato *Acqua calda*: che differenze ci sono tra un radiatore e uno scaldabagno? Sono ambedue in cucina, sono di metallo, contengono acqua calda ma il primo deve essere costruito in modo da disperdere il calore il più possibile e scaldare l'ambiente, mentre il secondo deve disperderlo lentamente conservando l'acqua calda. Considerando solo l'acqua, a temperatura fissata, la quantità di calore è tanto maggiore quanto più grande è il volume. Si parla poi di superficie in merito alla dispersione di calore: maggiore superficie, maggiore sarà la quantità di calore disperso, cioè trasmesso all'aria attraverso di essa. Quindi, le differenze di funzione tra scaldabagno e radiatore si riflettono nei rapporti matematici tra il volume e la superficie, proprio come nella cottura della carne. Prendiamo per esempio l'arrosto: il tempo di cottura dipenderà dalla forma, una cosa è cuocere un pezzo di arista, un'altra fare il rollè. Uno scaldabagno sarà tanto più efficiente dal punto di vista della conservazione del calore, quanto meno ne perde verso l'ambiente, quindi quanto minore sarà la sua superficie. Possiamo trattare quindi lo scaldabagno, la cottura di un pezzo di carne come un problema di geometria: il problema isoperimetrico. Vogliamo sottolineare il fatto che il problema isoperimetrico (stesso perimetro) corrisponde al problema isovolumetrico (stesso volume): sono due facce di uno stesso problema, il corpo che risolve uno risolve anche l'altro. Supponiamo infatti che C sia il corpo che fra tutti quelli con lo stesso volume ha la superficie più piccola; lo stesso corpo è anche soluzione del problema isoperimetrico, cioè è il corpo con volume maggiore a parità di superficie.

Dal punto di vista storico, il problema isoperimetrico ha origine nell'antichità. In particolare, i primi esempi di tale questione si hanno in qualche mito o leggenda. Citiamo in particolare *Il problema di Didone*, narrato da Virgilio nell'Eneide. Secondo la leggenda, Didone, regina di Tiro, costretta all'esilio dal fratello Pigmalione, si rifugiò presso re Iarba nel Nordafrica, per chiedere asilo. Iarba le promise che le avrebbe dato tanto terreno quanto poteva abbracciarne una pelle di toro. Didone non si scoraggiò ma tagliò la pelle in striscioline sottili e le unì in modo da formare una corda. Con essa recintò lo spazio nel quale sarebbe dovuta poi nascere Cartagine. Il problema chiede quale forma Didone avrebbe dovuto dare alla sua corda per abbracciare la massima area possibile, cioè qual'è la figura geometrica che a parità di perimetro ha area maggiore. La soluzione è intuitivamente un cerchio. Dato che la regina Didone avrebbe voluto che la sua città avesse uno sbocco sul mare, la soluzione è un semicerchio che ha la corda come diametro.



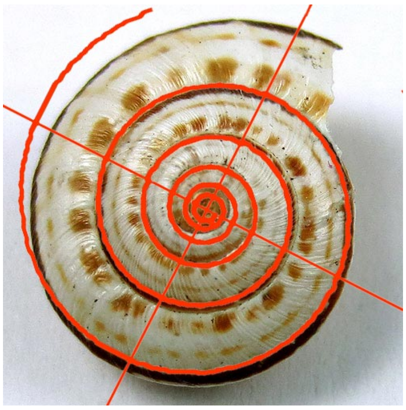
I primi matematici ad occuparsi della questione furono i greci antichi, intorno al IX secolo a.C. circa, i quali intuitivamente trovarono la soluzione del problema; solo nel 1800 si riuscì a dimostrarla rigorosamente e in maniera completa. Grande contributo fu dato da Zenodoro nel II secolo a.C. le cui ricerche rimasero valide fino al 1700; Jackob Steiner nell'Ottocento ne diede una dimostrazione puramente geometrica, che era però imprecisa, e venne successivamente analizzata da Dirichlet ed anche da Ennio de Giorgi nel 1953.

Citare nel menù il problema isoperimetrico è stata forse una scelta azzardata, in quanto cercare di spiegare in poche righe un problema di così difficile comprensione lo rende forse poco apprezzabile. Allo stesso tempo però abbiamo pensato che sarebbe stato interessante mostrare come un problema della matematica moderna possa in qualche modo centrare con problemi culinari con scontata soluzione. Infatti tutti sanno che una polpetta più piccola cuoce più in fretta di una polpetta più grossa, ma perchè? E' proprio una caratteristica dei problemi isoperimetrici: la soluzione è quasi banale, ma dimostrarlo è molto complicato.

5.2 Lente spirali all'aglio

Il guscio della chiocciola è un esempio dell'incrocio tra bellezza della natura e forme geometriche della matematica. La spirale logaritmica è la curva che meglio ne approssima la forma; tale conformazione è esatta solo per i primi giri, poi vediamo che non lo è più.

Il guscio inizia a formarsi in uno stadio precoce dello sviluppo della lumaca e man mano che cresce, deposita materiale. La conchiglia ha la funzione di mantenere al suo interno un animale che aumenta nelle dimensioni, ma la sua forma rimane la stessa. Per questo, la struttura del guscio è data dalla spirale logaritmica; infatti essa ha la caratteristica di avere la stessa forma, qualunque sia il grado di ingrandimento. L'approssimazione alla spirale logaritmica non è esatta dopo un certo numero di giri; possiamo spiegarlo osservando che la lumaca non cresce seguendo sempre la stessa progressione. Infatti, quando l'animale è adulto rallenta la crescita, quindi il deposito di materiale della conchiglia è minore, fino al raggiungimento della taglia massima, dove la lumaca non aumenta più le sue dimensioni.

La spirale logaritmica è stata studiata per la prima volta dal matematico René Descartes (1596-1650) e successivamente descritta in maniera estesa da Jakob Bernoulli (1654-1705), fin tanto da volerne una incisa sulla sua lapide. Purtroppo lo scalpellino, sbagliando, ne incise una archimedea, non conoscendo quella logaritmica.

In forma parametrica, la curva può essere scritta come

$$x(\theta) = a\mathrm{e}^{b\theta}\cos(\theta) y(\theta) = a\mathrm{e}^{b\theta}\sin(\theta)$$

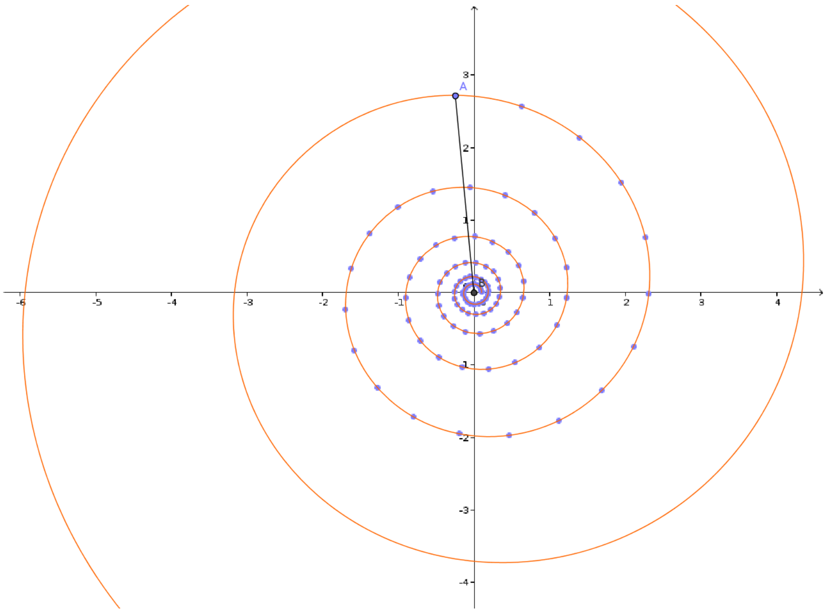
In coordinate polari invece è

$$r = a\mathrm{e}^{b\theta}$$

La spirale logaritmica è una curva regolare con curvatura non costante, avente l'angolo tra la curva e il vettore tangente in ogni punto costante.

Variando i parametri a e b, si possono ottenere diversi tipi di spirali logaritmiche. Il coefficiente a modifica le dimensioni della spirale e dunque la rotazione della curva; il termine b controlla quanto è stretta e in quale direzione essa si avvolge.

Abbiamo provato a disegnare con Geogebra una spirale logaritmica, giocando con i parametri per vedere come può variare la curva. Qui di seguito mostriamo uno dei risultati.



Capitolo 6

Dolci

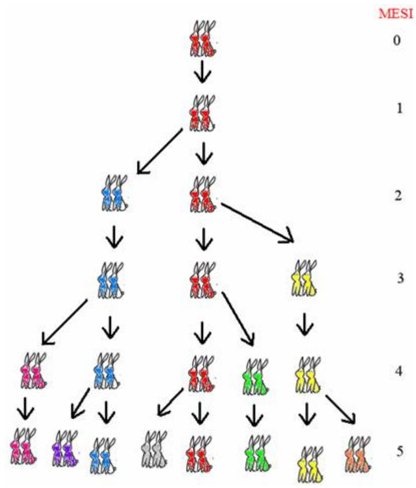
6.1 Crostatina di Fibonacci

Come sostiene Robert Ghattas nel suo libro *Insalate di matematica*, anche l'ananas, sebbene la sua destinazione sia la tavola, presenta un certo contenuto di matematica. Il motivo è che tutti gli ananas del mondo dispongono le proprie scaglie secondo un ordine rigoroso, che non è difficile distinguere sul corpo del frutto; ogni scaglia appartiene a due spire, una orientata in senso orario, l'altra in senso antiorario. Ciò che sorprende è la facilità con cui riusciamo a prevedere quante spire ci siano in ogni senso. Non è necessario contarle: in un ananas di misure normali ci saranno otto spire orarie e tredici antiorarie. Al più, se l'ananas è particolarmente grande, saranno rispettivamente tredici e ventuno.

I numeri che potrebbero comparire sulla buccia degli ananas sono pochi e sono soltanto quelli che compaiono nella successione detta *di Fibonacci*. La costruzione è molto semplice; partendo da una coppia di 1, ogni numero dal terzo in poi è la somma dei due precedenti:

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55 \quad 89 \quad 144 \quad 233 \quad 377...$$

Per comprendere al meglio la successione è importante conoscere la storia del matematico che la ha inventata: Fibonacci. Egli è cresciuto in Nord Africa e durante i suoi viaggi ha avuto modo di imparare le regole del sistema posizionale, già in uso dagli arabi. Il vantaggio del sistema era davvero notevole; per scrivere un numero con il sistema di numerazione romano si doveva ricorrere a molti simboli diversi ed era molto complicato fare calcoli. Il matematico cercò di introdurre in Italia la numerazione araba, suscitando disapprovazione fra i matematici del tempo, che spesso lo sfidavano a duello. Inutile dire che con il metodo efficace vinceva spesso Fibonacci. Nonostante questo matematico sembra essere il padre di una grande rivoluzione nell'ambito del calcolo, il suo nome è legato ad un problema di minore importanza, citato nel suo libro *Liber abaci*: *Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da un muro, per scoprire quante coppie di conigli discendessero da questa in un anno. per natura le coppie di conigli generano ogni mese un'altra coppia e cominciano a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita.*



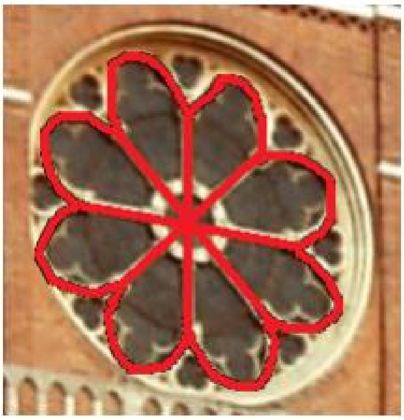
Nel grafico, possiamo osservare cosa accade nei primi cinque mesi. Per risolvere il problema potremmo disegnare un grafico come quello precedente a dodici livelli, e contare quante coppie ci sono. Oppure possiamo notare che la soluzione si trova facilmente utilizzando la serie di Fibonacci: dopo 12 mesi, ci sono esattamente 377 coppie di conigli!

Sottolineiamo inoltre che la corazza dell'ananas è un esempio di tassellatura del piano ad esagoni, che riprende quanto detto nella sezione *Pagnotte esagonali*. E' magnifico vedere come un singolo argomento si collega a più oggetti, anche molto diversi fra loro, come le pagnotte, gli ananas e gli alveari delle api, a dimostrazione di come la natura sappia scegliere le migliori configurazioni per ottimizzare gli spazi a disposizione.

Per la trattazione di questo argomento ed anche per quello dei frattali, ci siamo affidate, oltre ad internet, al libro di Robert Ghattas citato precedentemente. Si tratta di una raccolta di racconti matematici, in cui l'autore illustra gli argomenti con una notevole capacità di incuriosire, resa possibile anche dall'uso di un linguaggio divertente e quotidiano, che invoglia la lettura. Il libro è diviso in diverse sezioni: Viaggi, Tempo, Cucina, Carta, Giochi, Corpo Umano e Animali. Noi, in particolare, abbiamo utilizzato per il nostro progetto la sezione riguardante la cucina, anche se non neghiamo di esserci divertite a leggere tante altre curiosità.

6.2 Rodonea profumata

La rosa: che forma stupenda! Abbiamo utilizzato il nome *Rodonea* per descrivere la Torta delle Rose perchè, in geometria, è così chiamata una curva il cui grafico è caratterizzato da una serie di avvolgimenti attorno ad un punto centrale. Questa curva è chiamata anche *Rosa di Grandi*, in quanto è stata studiata da Luigi Guido Grandi. Quest'ultimo è un frate cremonese settecentesco, professore di matematica e filosofia, che per primo ha studiato la famiglia di curve sopra citata. In alcuni casi, tali avvolgimenti producono figure a forma di rosone; notare la parola rosone: anch'essa, come il nome rodonea, deriva dalla parola greca *rhòdon*, che significa appunto rosa. Si osservi la forma del rosone della basilica di Sant'Antonio di Padova: è proprio una rodonea!

Le rodonee hanno l'equazione parametrica seguente:

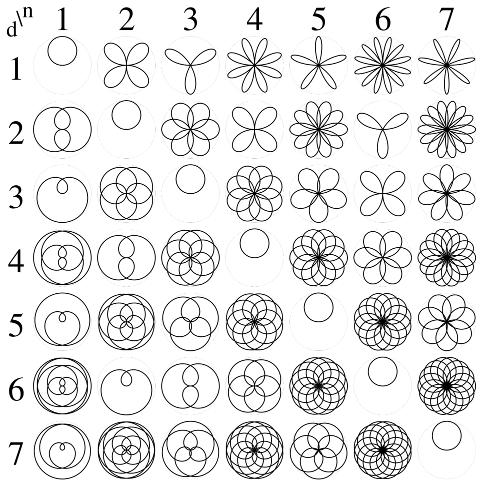
$$\begin{cases} x(t) = sin(kt)cos(t) \\ y(t) = sin(kt)sin(t) \end{cases}$$

In coordinate polari:

$$\rho = Rsin(\omega\theta)$$

dove R è un numero reale positivo che rappresenta la massima distanza della curva dal centro degli avvolgimenti e ω è un numero reale positivo che determina la forma della curva.

Osserviamo che se ω è un numero intero, la curva ha un numero finito di avvolgimenti, tutti passanti per l'origine degli assi, che generano una serie di petali componenti la classica figura a forma di rosone. Il numero di petali è pari a ω se questo è pari mentre è pari a 2ω se ω è dispari. Se ω è un numero razionale, allora la curva ha un numero di avvolgimenti che si intersecano in più punti. Ecco una tabella che illustra le forme delle rodonee, al variare di $\omega = \frac{n}{d}$

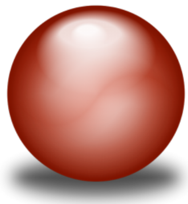


Vogliamo sottolineare che la figura riportata sopra è stata tolta dal menù vero e proprio in quanto risultava di difficile comprensione ai lettori (come abbiamo spiegato meglio nella sezione questionario), ma abbiamo ritenuto importante metterla nella relazione per completezza.

6.3 Toro in zucchero vanigliato

Abbiamo deciso di inserire questo dolce nel menù perché è uno dei primi esempi che salta in mente quando si parla di toro geometrico.

Facendo il confronto con il krapfen, abbiamo voluto trasmettere principalmente alcune idee chiave della topologia, spiegando di che cosa essa si occupa. Abbiamo cercato di mostrare, in modo implicito, il concetto di omeomorfismo tra due oggetti: un krapfen e una sfera; si può modificare il primo fino a fargli assumere forma sferica, senza romperlo, ma solo gonfiandolo. E' per questo che la topologia viene anche detta geometria della gomma, in quanto si possono modificare e deformare le figure, senza bucarle o romperle, con la tecnica del taglia e cuci.

Abbiamo inoltre concentrato l'attenzione sull'importanza dei buchi nella topologia, spiegando che il numero di questi ultimi distingue il genere delle superfici.

Riteniamo questi concetti i più significativi per spiegare in modo sintetico e chiaro la topologia. Questa scelta ci ha permesso di mostrarla in maniera meno astratta possibile, anche se sappiamo che questo ambito della matematica è molto più vasto e complesso rispetto a quanto presentato.

Il toro può essere descritto in equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x(p,t) = (R + r\ \cos p)\cos t \\ y(p,t) = (R + r\ \cos p)\sin t \\ z(p,t) = r\ \sin p \end{cases}$$

dove t, p variano tra 0 e 2π, $R > 0$ è la distanza dal centro della circonferenza generatrice dall'asse di rotazione e $r > 0$ è il raggio della circonferenza generatrice. Oppure con equazioni cartesiane, dove l'asse di rotazione coincide con l'asse z:

$$\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = r^2$$

Capitolo 7

Vino

7.1 Vino in bottiglia di Klein

Come ogni cena che si rispetti, è necessario accompagnare del buon cibo matematico con del vino, in forma altrettanto matematica. Subito ci è venuta in mente la nota bottiglia di Klein; come sappiamo, non è una vera bottiglia, ma il suo nome la ricorda. Infatti, viene così chiamata per una traduzione errata del termine tedesco *Fläche*, che significa superficie; questo è stato confuso con la parola *Flasche*, che significa bottiglia. Dopo qualche ricerca, abbiamo trovato un sito interessante, che poteva fare al caso nostro.

La ditta americana *Acme Vial e Glass Company* che normalmente produce bottiglie in vetro, di vari generi e utilizzo, si è divertita a creare anche delle bottiglie di Klein. *After 5 years of experimentation, I'm delighted to offer the Acme Klein Bottle Wine Bottle. Yes, you can store wine in it, and pour* *wine into and out of it. But no, it's not very practical as a wine carafe.* Come si dice nella citazione, non sono bottiglie pratiche come contenitori, in quanto rispecchiano le caratteristiche geometriche della bottiglia di Klein, perciò senza una netta distinzione tra interno ed esterno.

Nel sito della ditta, si possono scegliere e comprare bottiglie di Klein di diversi modelli e dimensioni. La bottiglia sopra illustrata è stata chiamata *Kingbridge Klein Bottle* ed è alta 1.1 metri, ha un diametro di 50 cm e per la sua costruzione sono stati utilizzati 15 Kg di vetro Pyrex.

Per essere sincere, ci siamo molto divertite a scoprire quanto si possa giocare con la fantasia partendo dalla bottiglia di Klein. Ci siamo stupite guardando queste creazioni; speriamo che il nostro menù susciti lo stesso effetto nei lettori, perchè è questo l'obbiettivo che ci siamo prefissate.

Capitolo 8

Conclusioni

Al termine di questa esperienza, possiamo dire che questo progetto è servito a noi, prima di tutto, per scoprire nuovi aspetti della matematica e arricchire le nostre conoscenze in ambiti che probabilmente non avremmo approfondito nel corso dei nostri studi.

Per quanto riguarda la comunicazione, è stato un primo approccio a questo ambito; come detto nell'introduzione, è stato particolarmente difficile spiegare in termini semplici i concetti matematici. Molto utili a tale fine sono state le lezioni del corso; in particolare, l'ultima lezione al Muse, con Samuela Caliari e Katia Danieli, responsabili del settore comunicativo del museo, è stata illuminante, sia per quanto riguarda le strategie della comunicazione, sia perchè abbiamo capito quanto lavoro sta alle spalle di un qualsiasi progetto divulgativo, come abbiamo potuto sperimentare anche noi, nel nostro piccolo.

Sicuramente, aver fatto questo progetto, aver ascoltato i consigli e aver visto degli esempi di persone che tutti i giorni lavorano con la comunicazione, tornerà utile nelle nostre esperienze future, in qualsiasi ambito ci troveremo a divulgare la matematica.

Se ascolto dimentico, se vedo ricordo, se faccio capisco...se mi emoziono mi appassiono! Condividiamo il motto usato dai collaboratori del Muse, in quanto crediamo fermamente che, nel momento in cui entra in gioco il sentimento, si ha voglia di approfondire la causa dell'emozione. Ciò che ci ha guidate nella stesura del menù è proprio questo: speriamo che leggerlo faccia fare soltanto mezzo sorriso, quel che basta per rimanere incuriositi e avere poi l'interesse di fare degli approfondimenti.

Bibliografia

[1] Enrico Giusti, *La matematica in cucina*, Bollati Boringhieri, Torino, 2004

[2] George L. Legendre, *Pasta by Design*, Thames e Hudson

[3] Robert Ghattas, *Insalate di matematica*, SIRONI Editore, 2004

[4] Benoit Mandelbrot, *Gli oggetti frattali: forma, caso e dimensione*, Einaudi, 2000

[5] Giovanni Carrada, *Comunicare la scienza, kit di sopravvivenza per i ricercatori*, SIRONI Editore, 2005

[6] http://www.geometryofpasta.co.uk

[7] https://www.youtube.com/watch?v=GFbXEyhlGbI, *Davide Cassi: La cucina come laboratorio*

[8] http://effediesse.mate.polimi.it/file/1/File/2015EXPO/PastaLRsint.pdf

[9] https://it.wikipedia.org

[10] http://www.kleinbottle.com/winebottlekleinbottle.html