Primo incontro:

la ricerca del linguaggio necessario a parlare di caso.

1. Cos'è la probabilità?

«La teoria delle probabilità non è altro che il tentativo del genere umano di comprendere l'incertezza dell'universo, di definire l'indefinibile» (A.D. ACZEL, *Chance*) Questa, naturalmente, non è una definizione; tuttavia, vedremo come non sia semplice dare una definizione più soddisfacente di questa.
Più semplice partire da questa domanda: perché parliamo di probabilità? Conosciamo e incontriamo spesso fenomeni essenzialmente casuali in natura, economia, nella nostra vita quotidiana. Il nostro scopo sarà quello di mostrare che «capire la teoria delle probabilità è utilissimo. Ne usiamo una forma molto semplice tutti i giorni» ad esempio quando ci chiediamo "qual è la probabilità di perdere l'autobus all'uscita di scuola?"
Passiamo ora a formalizzare un'esperienza empirica: come possiamo rappresentare i risultati? Quali sono i concetti che dobbiamo introdurre?
Esperienza. Ad ogni gruppo vengono forniti dei sacchetti con palline di colori diversi, in modo che ogni gruppo abbia una diversa composizione dell'urna. Si chiede allora di descrivere l'esperienza "estraggo una pallina".

Una probabilità è una misura quantitativa della verosimiglianza di un evento; se siamo sicuri che qualcosa accadrà, gli assegneremo una probabilità del 100%, ma se siamo sicuri che qualcosa non accadrà, gli daremo probabilità nulla. Agli altri eventi si assegnano probabilità intermedie, sotto forma di numeri compresi tra 0 e 1 (che è la scala matematica di misura delle probabilità).
L'assegnazione di una probabilità è –di per sé- arbitraria, ma se dobbiamo "usarla", in relazione ad altri eventi, dovremo richiedere che verifichi certe leggi logiche e matematiche.
Possiamo usare anche noi il termine "probabilità oggettiva" relativamente all'estrazione delle palline da un'urna (questo comporta che esiste una "probabilità soggettiva": quali esempi possiamo dare a riguardo?)

Prendiamo in mano un dado. E' noto che gli uomini hanno iniziato a giocare a dadi nel neolitico, circa seimila anni fa, con dadi (astragaloi) formati da particolari falangi della pecora aventi quattro facce lisce e due semisferiche. Oggi giochiamo con dadi cubici, in cui considerazioni di simmetricità portano a ritenere tutte le sei facce egualmente verosimili: allora assegneremo ad ogni faccia una probabilità di 1/6.
Esperienza. Rispondiamo alle seguenti domande. Lanciamo un dado: qual è la probabilità che esca un numero pari? Lanciamo due dadi: qual è la probabilità che escano due numeri pari? Lanciamo un dado 6 volte (oppure 6 dadi contemporaneamente): qual è la probabilità che escano tutti punti diversi? Se effettuiamo la prova, cosa otteniamo?
Domanda: quante prove dobbiamo fare perché la probabilità di ottenere (almeno una volta) tutti i punti contemporaneamente sia almeno del 50%? Del 90%? Questo problema è legato (ma non uguale) al problema dei compleanni.

Approfondimento. Problema dei compleanni. Qual è la probabilità che in una classe di N persone, vi siano almeno due persone con lo stesso giorno di nascita (senza contare l'anno)?
Il problema precedente, invece, corrisponde alla seguente domanda: qual è la probabilità che in una classe di N persone, vi sia almeno una persona con il mio stesso giorno di nascita (senza contare l'anno)?

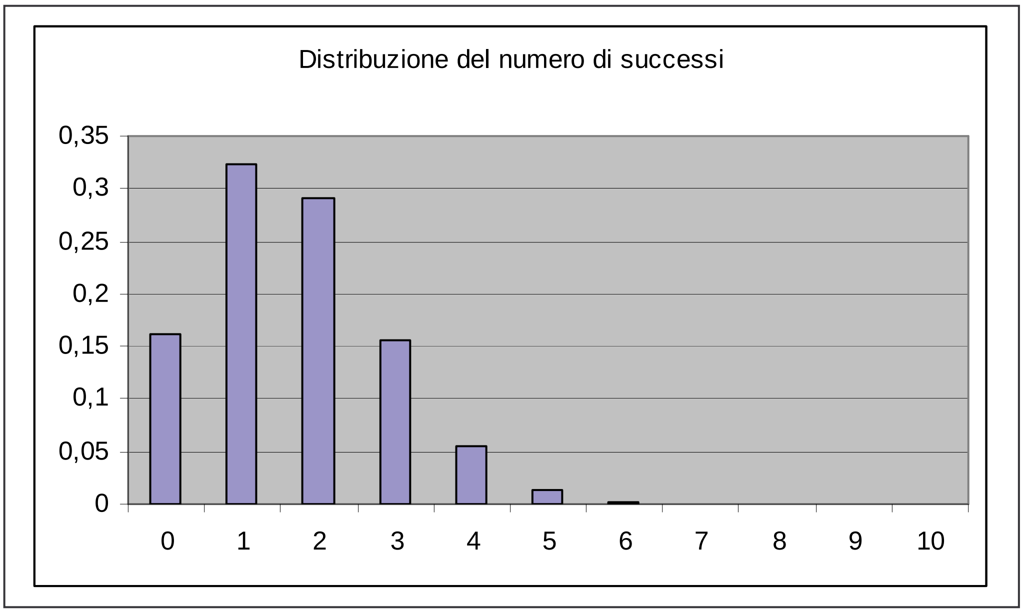
Una brillante presentazione di questi problemi si trova nel libro di F. MOSTELLER, *Fifty challenging problems in probability with solutions*.

Come possiamo valutare le probabilità tutte le volte in cui non ci troviamo davanti ai dadi (o, in generale, ad un esperimento in cui gli esiti sono equiprobabili)? Ad esempio, come possiamo stimare la probabilità che domani piova? Gli esiti possibili sono {piove, non piove}, ma non sono in generale equiprobabili. Se però sapessimo che domani è il 31 gennaio, e che negli ultimi 100 anni il 31 gennaio è piovuto 25 volte, (e se non abbiamo altre informazioni, come ad esempio le foto del satellite, che ci portino a dire che domani non è un 31 gennaio qualsiasi) potremo stimare la probabilità di pioggia come se dovessimo estrarre una pallina da un'urna con 25 palline nere (piove) e 75 gialle (sole), ottenendo una probabilità di 25/100.
B. DE FINETTI (1906-1985, fu un importante matematico italiano che lavorò a Roma a cavallo tra probabilità e statistica) volle portare queste idee alle estreme conseguenze, inventando un metodo, ora noto come *gioco di De Finetti*, per valutare "oggettivamente" le probabilità "soggettive"[1].

2. Variabili aleatorie.

Ritorniamo ai nostri dadi. Qual è la risposta alla domanda: quante volte dobbiamo lanciare un dado finché esca il punto 5? La risposta sembra ovvia: è un numero (il numero di lanci), ma… ognuno di noi ha ottenuto un numero diverso (più o meno☺): come è possibile? La risposta corretta invece è una *variabile aleatoria*.
Definizione. Una variabile aleatoria è un oggetto che descrive il risultato di un esperimento, il cui esito è aleatorio, associando ad ogni possibile esito la probabilità di uscita.
Proviamo a descrivere le variabili aleatorie: lancio di un dado, somma del lancio di due dadi, numero di lanci (tempo di attesa) per l'uscita del punto 5.[2]

Esperienza. Lanciamo un dado 10 volte e contiamo quante volte esce il punto 5. Ripetiamo l'esperimento più volte (forse facciamo prima se lanciamo 10 dadi alla volta) e rappresentiamo i risultati ottenuti. Otteniamo un istogramma con 11 colonne (anche se le ultime difficilmente si verificano) che assomiglia a questo.



[1] Il gioco, in poche parole, consiste nel trovare qual è l'urna "equivalente" alla mia attesa di successo.
[2] Approfondimento. Dato che la somma delle probabilità deve essere 1, possiamo usare questo punto per mostrare che la serie geometrica di parametro p ha somma $1/(1-p)$.

L’altezza di ogni colonna si ottiene calcolando il numero di esiti favorevoli, moltiplicato per la probabilità di ognuno di essi (probabilità che sono tutte uguali). La cosa difficile è calcolare il primo numero, che è detto coefficiente binomiale di parametri n (numero di tentativi) e k (numero di successi), e vale $n!/k!\,(n-k)!$.

Il triangolo di Pascal. E’ un oggetto notevole, scoperto dal grande filosofo francese B. PASCAL nel Seicento, che ha proprietà interessanti in vari campi della matematica; a noi interessa perché ci consente di visualizzare i coefficienti binomiali, e quindi di calcolare la probabilità di ottenere k successi in n tentativi.
Il triangolo si costruisce per righe:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Diciamo riga 0 quella che comprende il primo 1, e numeriamo le altre righe di seguito. A partire dalla seconda riga (riga 1), ogni numero all’interno si ottiene come somma dei due numeri che stanno sopra (al bordo vi sono sempre 1). Osserviamo anche che la somma dei numeri su ogni riga è pari a $2^{(\#\text{ riga})}$.
Lanciamo una moneta una volta: allora la riga 1 ci dice che abbiamo una possibilità (su due) di ottenere zero successi (nessuna testa, ossia esce croce) e una possibilità di ottenere un successo (testa). Se lanciamo la moneta due volte, abbiamo una possibilità su quattro di ottenere zero successi, due di ottenere un successo e una di ottenere due successi. Se la moneta è equilibrata, questi numeri diventano immediatamente probabilità: su 3 lanci, ho una probabilità di 1/8 di non avere successi, una probabilità di 3/8 di avere un successo, la stessa di avere due successi e una probabilità di 1/8 di avere tre successi.
In generale, se la moneta ha una probabilità p di ottenere testa, la probabilità di ottenere 2 successi su 3 lanci sarà $3\,p^2(1-p)$.

3. Valore medio.

Supponiamo che vi proponga di giocare contro di me ai dadi: se esce un numero pari vincete 3€, se esce dispari nulla. Però… per giocare si deve pagare un biglietto: quanto siete disposti a pagare per giocare? …aggiungere le considerazioni da Mosteller riguardo la propensione al gioco d’azzardo…
Siamo però d’accordo che il prezzo massimo che paghereste è di 1,50€. Come otteniamo questo valore? Dal fatto che siamo disposti a giocare se il gioco è equo (oppure sbilanciato a nostro favore) e diremo che un gioco è equo se la mia vincita attesa è pari alla vostra (supponendo di giocare gli uni contro gli altri).
Definizione. Il valore atteso di una variabile casuale è la somma dei prodotti (possibile valore × relativa probabilità). In altre parole, il valore atteso è una media “ponderata”: più un esito è probabile (improbabile) più (meno) peso gli daremo.

Approfondimento. I giochi d’azzardo contro un casinò non sono mai equi. Prendiamo ad esempio una roulette. La puntata più semplice è sul rosso/nero, che paga una volta la posta: qual è la vincita attesa dopo ogni lancio?

Ma i casinò non stanno solo a Las Vegas oppure a Montecarlo. Qual è la probabilità di azzeccare un ambo[3]? Visto quanto paga lo stato (235 volte la posta), il gioco è equo?

Approfondimento. Perché (non) si deve puntare sui numeri ritardatari.
Qual è la probabilità che un numero non esca nella prossima estrazione del lotto? E' pari a q=17/18; allora la probabilità che quel numero non esca per 100 estrazioni consecutive, dato che le estrazioni sono tra loro indipendenti, è pari a q^{100}=0,3%.
Quando decidiamo di puntare un numero che non esce da 99 estrazioni, abbiamo in mente che la probabilità che quel numero non esca per 100 estrazioni di fila è molto bassa; tuttavia, la domanda che dobbiamo porci è un'altra: qual è la probabilità che non esca nella *prossima* estrazione? Questa probabilità è pari a q, indipendentemente da cosa è successo in precedenza. Per trovare una base matematica alla nostra intuizione, dovremmo supporre che le estrazioni non sono indipendenti (ma questa ipotesi diventa logicamente dificile da sostenere).

Esperienza. Lanciate un dado 10, 20, 50 volte, e calcolate qual è la vincita che ottenete nella simulazione (ricordate di sottrarre il biglietto di ingresso!). A quanto tende il rapporto (vincita media / numero di tentativi)?
A quanto tende il rapporto (numero di successi / numero di tentativi)? Noi assegnamo all'evento "esce il punto 5" la probabilità 1/6; ed in effetti, il numero di volte in cui avviene è circa 1/6. Questo risultato è noto come *legge dei grandi numeri*; noi la abbiamo già usata, in qualche modo, quando abbiamo valutato la probabilità di pioggia il 31 gennaio.
Ritorniamo al triangolo di Pascal e prendiamo in esame il numero di successi di una moneta equilibrata. Qual è la probabilità di avere n successi in $2n$ tentativi? A quanto tende questo valore per n che cresce? Si osservi che la legge dei grandi numeri sembra suggerire (ma è una interpretazione errata) una cosa diversa, ossia che facendo $2n$ lanci, il numero di successi e di insuccessi tende ad essere uguale. Ritorneremo su questo argomento quando parleremo delle passeggiate casuali.

Approfondimento. Vi sono interessanti paradossi, legati all'infinito, che si possono presentare. Tutti, in qualche misura, sono legati all'idea che «tutto ciò che può accadere accadrà, se gli diamo un numero sufficientemente alto di possibilità». E' così che si arriva a risultati bizzarri, come quello, noto, della scimmia che scrive la Divina Commedia. Se ho una scimmia immortale e la obbligo a scrivere su una tastiera, per l'eternità, nella sequenza infinita di caratteri che scriverà potrò riconoscere la Divina Commedia proprio come l'ha scritta Dante, con tutti gli spazi, i segni di interpunzione, le maiuscole… ma troverò anche tutte le altre opere della letteratura mondiale!
A volte non serve neanche arrivare all'infinito. Supponete di essere una frana nei colloqui di lavoro e di avere una probabilità di essere assunti pari allo 0,5%. Se avrete costanza, e continuate ad insistere, prima o poi avrete successo: ad esempio, dopo 2000 tentativi, la probabilità di essere stati assunti è $1-(1-0,005)^{2000} = 0,999956$.
Il paradosso di Pietroburgo è un classico argomento di D. BERNOULLI (1700-1782). Supponiamo che vi propongano di puntare una certa cifra, quindi di lanciare una moneta finché non esca testa; allora, vi verrà data un numero di euro pari a 2 elevato al numero di lanci che avete effettuato. Ad esempio, se esce testa al quinto lancio, vincete 2^5 = 32€. Qual è la cifra che siete disposti a puntare per partecipare al gioco?

---

[3] I casi totali (equiprobabili) sono 90×89×88×87×86 che posso dividere per 5!=5×4×3×2×1 in modo da contare solo le cinquine ordinate; per contare i casi favorevoli, osserviamo che devo avere i numeri su cui ho puntato, che mi dà un fattore 2×1 diviso 2! (in modo che siano ordinati) moltiplicato per il numero di modi in cui posso scegliere gli altri tre numeri, ossia 88×87×86 diviso 3!. In totale ho quindi una probabilità di vittoria pari a p=5×4/90×89; la vincita media se puntiamo 1€ è $235p-(1-p) = 236p-1$ = -0,41€

4. Tempi di vita attesi.

In fisica, il tasso di decadimento λ di un materiale radioattivo è la frazione di materiale che, in un certo intervallo di tempo, è soggetta a decadimento (che potrà essere rilevato ad esempio attraverso un contatore Geiger); a partire da questo numero, i nostri colleghi fisici ci potranno chiedere qual è la durata di vita media del materiale, oppure qual è il tempo necessario affinché l'attività radioattiva si dimezzi.

Esperienza. Si lanciano N dadi, quindi se ne elimina una parte secondo certe regole (eliminiamo tutti i punti pari, oppure tutti i punti 5, ecc.); qual è la percentuale che viene eliminata ad ogni lancio? Possiamo usare questi dati per stimare λ?

Dopo quanti lanci siamo rimasti con metà dei dadi iniziali? Dopo quanti lanci non abbiamo più dadi da lanciare? Se prendiamo $N=10$, $\lambda=1/2$, otteniamo che la vita media è pari a 3,726, l'emivita è 1,70.