

PROGETTO LAUREE SCIENTIFICHE
Liceo Scientifico G. Galilei
Incontro n.6 - Diffusione e entropia

Il nucleo dell'incontro è l'utilizzo del modello di Ehrenfest per descrivere fenomeni di diffusione, con l'obiettivo di introdurre l'entropia a partire dalla descrizione microscopica di un fluido.

1 Contenuti e realizzazione

Fase 1: osservazione sperimentale di due fenomeni di diffusione:

1. del fumo si propaga in un recipiente dove precedentemente era stato realizzato del vuoto;
2. due parti di una vaschetta, che contengono rispettivamente acqua e fluorescina, vengono messe in contatto ed avviene il mescolamento tra i due fluidi.

Segue una discussione fenomenologica con gli studenti.

Fase 2: Si propongono due modelli per i fenomeni appena osservati. Il primo è costituito da una numero N di gettoni numerati (le particelle) che si trovano all'interno di un riquadro A (la cella), che confina con un analogo riquadro vuoto B ; i numeri dei gettoni vengono estratti a caso, e per ogni numero che esce il gettone corrispondente viene spostato nell'altro riquadro. I numeri usciti vengono rimessi in mezzo agli altri, così che possono essere estratti di nuovo. Dopo un po' di estrazioni, le oscillazioni dei numeri N_A e N_B di gettoni rispetto ad $N/2$ tenderanno a diminuire. Contestualmente il numero di gettoni può essere inserito in un foglio elettronico in modo da visualizzare N_A o N_B in funzione del numero di estrazioni.

Il secondo modello è analogo al primo; l'unica differenza è che ambedue i riquadri contengono all'inizio N gettoni di due colori diversi, bianco e rosso, ad esempio. Vengono estratti i numeri dei gettoni bianchi, e tutto avviene come nel caso precedente; l'unica regola aggiuntiva è la seguente: quando si sposta un gettone bianco in un altro riquadro lo si sostituisce con un gettone rosso preso dal riquadro di arrivo. In questo modo il numero di gettoni in ogni riquadro rimane sempre uguale ad N .

Da questo gioco, che è condotto interamente dagli studenti, segue una discussione che può riguardare l'andamento spontaneo del sistema, la relazione fra stati microscopici e stati macroscopici, la probabilità che il sistema si trovi in un determinato stato, ecc.

Evidentemente con questi modelli si sta supponendo che la probabilità che una particella cambi cella sia la stessa per ogni particella; inoltre lo stato

microscopico del sistema è individuato dalle particelle considerate individualmente (ed idealmente associate ad un numero diverso), mentre lo stato macroscopico è identificato con il numero di particelle presente in ogni cella. Ai due modelli esposti si può affiancarne un terzo nel quale le particelle (i gettoni) siano solo 6; ciò servirebbe sia a ricollegarsi agli esperimenti realizzati tramite il lancio di dadi, sia ad evidenziare come le fluttuazioni possano essere relativamente ampie quando il numero totale di particelle sia basso.

Fase 3: a questo punto si può passare ad un'analisi di tipo più matematico. Un modo semplice per argomentare che il numero di particelle più probabile è $N_A = N_B = N/2$, è il seguente: supponiamo che la probabilità che N_A particelle che si trovino in una cella diventino $N_A - 1$, sia proporzionale a N_A (è ragionevole pensare che più particelle ci siano in A più facilmente una si sposterà in B), quindi $P(N_A \rightarrow N_A - 1) \propto N_A$; d'altra parte $P(N \rightarrow N - 1) = 1$, e quindi segue che $P(N_A \rightarrow N_A - 1) = N_A/N$. Ma allora $P(N_B \rightarrow N_B - 1) = N_B/N$, e quindi si può rapidamente concludere che il sistema tende a raggiungere una situazione di equilibrio quando $N_A = N_B$.

Un modo più esauriente (e anche un po' più complesso) per arrivare al medesimo risultato è quello di contare il numero di stati microscopici che corrispondono ad un dato stato macroscopico. Con dei semplici esempi si può arrivare al risultato generale che il numero di permutazioni di N oggetti è $N!$, e quindi, poiché non si vuole tener conto dell'ordine, il numero di microstati corrispondenti ad N_A particelle è

$$W(N_A) = \frac{N!}{N_A!(N - N_A)!}. \quad (1)$$

Poiché supponiamo che ogni microstato sia equiprobabile, allora la probabilità associata al macrostato N_A sarà proporzionale a $W(N_A)$. La probabilità associata al macrostato $N_A - 1$, invece, è proporzionale a $W(N_A - 1)$, che, per la (1), è uguale a

$$W(N_A - 1) = \frac{N!}{(N_A - 1)!(N - N_A + 1)!} = W(N_A) \cdot \frac{N_A}{N - N_A + 1}. \quad (2)$$

Quindi il macrostato $N_A - 1$ sarà più probabile del macrostato N_A quando $N_A/N - N_A + 1 > 1$, cioè quando

$$N_A > \frac{N}{2} + \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Analogamente si può dimostrare che il macrostato $N_A + 1$ è più probabile del macrostato N_A quando

$$N_A < \frac{N}{2} - \frac{1}{2}; \quad (4)$$

e quindi N_A è il macrostato più probabile quando $N_A = N/2$.

A questo punto si può introdurre la funzione entropia, definita come $S = k \log W$, che in un sistema isolato tende ad aumentare, e che rappresenta una misura (si veda il secondo modello) del disordine del sistema. Inoltre, nel passaggio dalla descrizione micro a quella macro emerge il concetto di *irreversibilità*, in quanto la probabilità di avvicinarsi allo stato di equilibrio è maggiore della probabilità di allontanarsi da esso.

2 Obiettivi e metodologia

Gli obiettivi che ci si propone di raggiungere sono i seguenti:

- associare la probabilità che il sistema si trovi in un determinato macrostato al numero di microstati corrispondenti;
- verificare che un sistema isolato, analogo a quelli analizzati, tende spontaneamente verso uno stato di equilibrio;
- comprendere come gli stati più ordinati siano anche quelli meno probabili.

Dal punto di vista metodologico è importante che gli studenti acquisiscano un primo contatto con il fenomeno fisico (prima fase), e quindi gestiscano in modo il più possibile autonomo la fase di realizzazione del modello (seconda fase); infine si discuteranno interattivamente i passaggi matematici necessari per formalizzare il problema (terza fase), la definizione dell'entropia e il suo significato fisico.