Calcolo (approssimato) di coefficienti di Fourier con Excel...
ovvero la trasformata di Fourier discreta (DFT) sotto mentite spoglie!

Sisto Baldo, Dip. Mat. UniTN

Ciao a tutti, dopo l'incontro di giovedì scorso al da Vinci di Trento, mi sono chiesto come ampliare la parte "interattiva e di laboratorio" degli incontri di matematica.

Nella proposta didattica che ho tentato di implementare al da Vinci c'è effettivamente qualcosa di cui ho sentito la mancanza: *dopo* aver trovato, in modo più o meno euristico, l'espressione dei coefficienti di Fourier e *prima* di parlare dell'ottimalità del "polinomio trigonometrico di Fourier" di grado N[1], sarebbe altamente desiderabile fornire ai partecipanti al laboratorio gli strumenti per *calcolare* esplicitamente qualche coefficiente di Fourier! E' vero che questo viene fatto dai due programmini java che ho preparato, ma il tutto avviene "dietro le quinte", senza che i ragazzi possano davvero vedere *come* viene fatto il calcolo...

Che un calcolo esplicito di coefficienti di Fourier fosse desiderabile me lo aveva anche segnalato Renata Maffetti in uno dei nostri proficui scambi di idee: all'epoca avevo obiettato che senza avere a disposizione alcun metodo di calcolo degli integrali, la cosa mi sembrava difficile. E' ben vero che si può fare qualche conto con Maple o con Derive, ma la cosa rischia di rimanere misteriosa quasi quanto l'applet java.

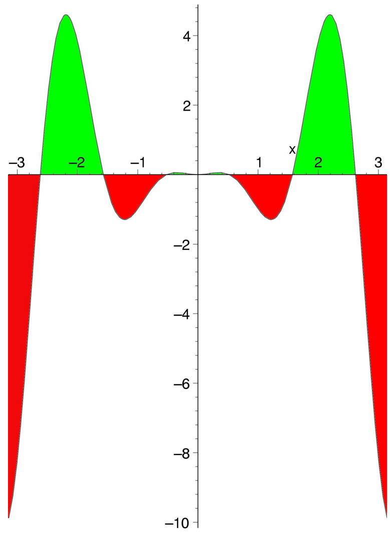
Allora, cosa c'è di meglio e di più semplice di calcolare qualche coefficiente di Fourier approssimato, sostituendo l'integrale con un'unione di rettangoli?

Supponiamo dunque di aver scelto una funzione $f(t)$, periodica di periodo 2π e fatta non troppo male. Sappiamo che i coefficienti di Fourier di f sono dati da

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

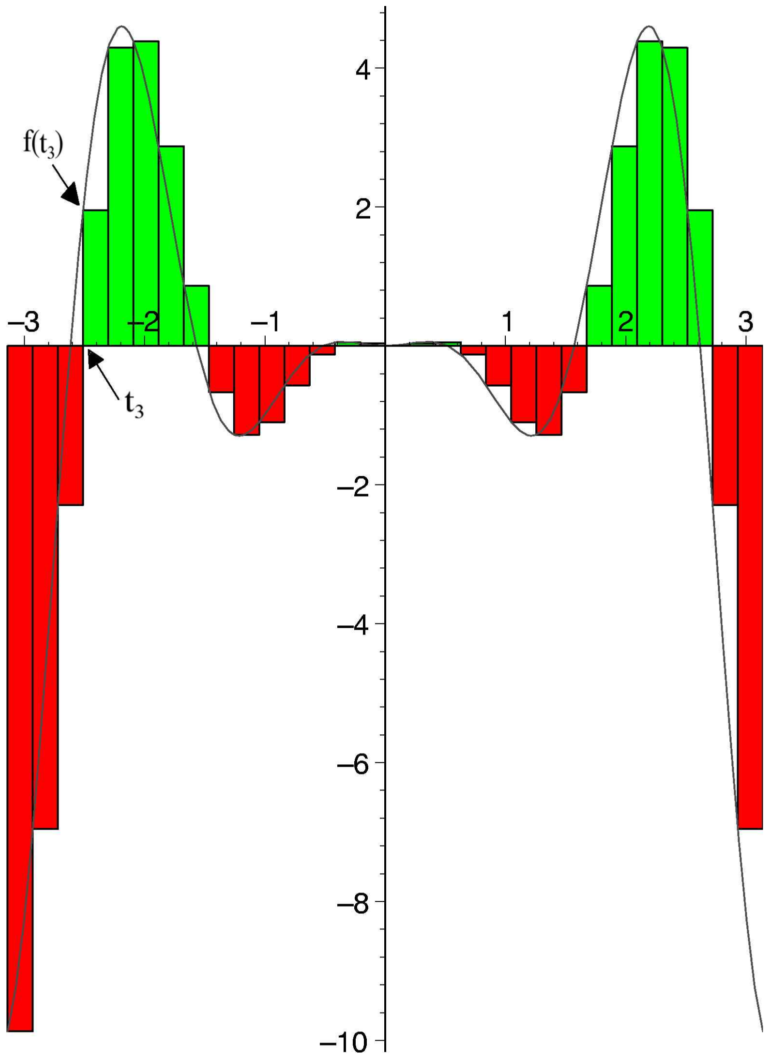
Se per esempio prendiamo $f(t) = t^2$ (estesa periodicamente fuori dall'intervallo$[-\pi, \pi]$), per trovare il coefficiente a_n dovremmo calcolare l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt$: nella figura che segue si vede proprio il grafico di questa funzione per $n = 3$... e l'integrale desiderato, come abbiamo visto, è dato dall'area della regione verde meno l'area della regione rossa:

[1] Magari con molti meno dettagli di quelli che ho inflitto agli studenti del da Vinci...specie se la parte matematica è distribuita su due soli incontri!



Un modo facile, anche se non precisissimo, per calcolare l'integrale voluto, consiste nell'approssimare l'area che ci interessa con opportuni rettangoli: dividiamo l'intervallo $[-\pi, \pi]$ in $2K$ parti uguali, e chiamiamo $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{2K}$ gli estemi di questi intervalli (da sinistra a destra: in particolare, $t_0 = -\pi$, $t_{2k} = \pi$). La larghezza di questi intervallini sarà π/K.

Ora, se K è abbastanza grande, possiamo pensare di sostituire la regione che ci interessa all'interno dell'i-esimo intervallino (cioè l'area catturata tra il grafico della funzione e l'asse t tra t_i e t_{i+1}, col segno giusto...) con un rettangolo di base l'intervallo $[t_i, t_{i+1}]$ e altezza $f(t_i)$. In figura, si vede proprio questa approssimazione dell'integrale di cui alla figura precedente, con $K = 15$:



In altre, parole, abbiamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt \simeq \frac{\pi}{K}\left(f(t_0)\cos(nt_0)+f(t_1)\cos(nt_1)+f(t_2)\cos(nt_2)+\ldots+f(t_{2K})\cos(2nK)\right)$$

(e si noti che i segni sono già quelli giusti!), da cui

$$(*)\ a_n \simeq \frac{1}{K}\left(f(t_0)\cos(nt_0)+f(t_1)\cos(nt_1)+f(t_2)\cos(nt_2)+\ldots+f(t_{2K})\cos(2nK)\right).$$

Analogamente, avremo

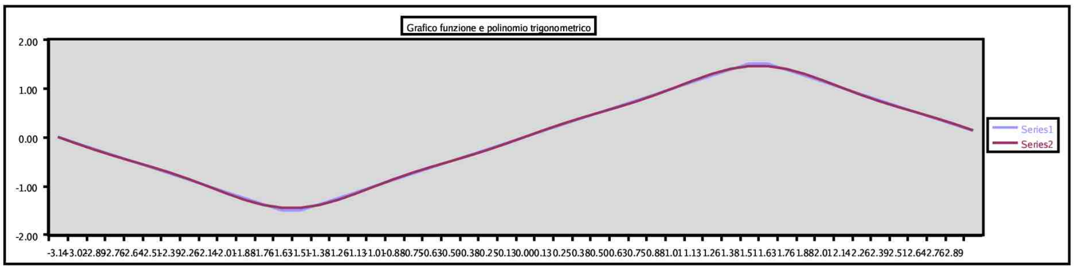
$$(**)\ b_n \simeq \frac{1}{K}\left(f(t_0)\sin(nt_0)+f(t_1)\sin(nt_1)+f(t_2)\sin(nt_2)+\ldots+f(t_{2K})\sin(2nK)\right).$$

La figura mostra chiaramente che questa è un'approssimazione abbastanza grezza: le aree dei rettangoli sono evidentemente ora più piccole, ora più grandi dell'area che veramente ci interesserebbe... Però l'approssimazione migliora aumentando il numero di suddivisioni.

I valori approssimati dei coefficienti di Fourier, secondo le formule (*) e (**) scritte sopra, si possono calcolare piuttosto facilmente con Excel

Nella figura seguente si può vedere il contenuto del foglio Excel http://www.science.unitn.it/~baldo/divulgazione/dft_excel.xls

t_i	f(t_i)	cos(t_i)	sin(t_i)	cos(2*t_i)	sin(2*t_i)	Cos(3*t_i)	Sin(3*t_i)	Cos(4*t_i)	Sin(4*t_i)	Cos(5*t_i)	Sin(5*t_i)	Cos(6*t_i)	Sin(6*t_i)	g(t_i)
-3.14	-0.00	-1.00	-0.00	1.00	0.00	-1.00	-0.00	1.00	0.00	-1.00	-0.00	1.00	0.00	-0.00
-3.02	-0.13	-0.99	-0.13	0.97	0.25	-0.93	-0.37	0.88	0.48	-0.81	-0.59	0.73	0.68	-0.14
-2.89	-0.25	-0.97	-0.25	0.88	0.48	-0.73	-0.68	0.54	0.84	-0.31	-0.95	0.06	1.00	-0.27
-2.76	-0.38	-0.93	-0.37	0.73	0.68	-0.43	-0.90	0.06	1.00	0.31	-0.95	-0.64	0.77	-0.39
-2.64	-0.50	-0.88	-0.48	0.54	0.84	-0.06	-1.00	-0.43	0.90	0.81	-0.59	-0.99	0.13	-0.50
-2.51	-0.63	-0.81	-0.59	0.31	0.95	0.31	-0.95	-0.81	0.59	1.00	0.00	-0.81	-0.59	-0.61
-2.39	-0.75	-0.73	-0.68	0.06	1.00	0.64	-0.77	-0.99	0.13	0.81	0.59	-0.19	-0.98	-0.73
-2.26	-0.88	-0.64	-0.77	-0.19	0.98	0.88	-0.48	-0.93	-0.37	0.31	0.95	0.54	-0.84	-0.87
-2.14	-1.01	-0.54	-0.84	-0.43	0.90	0.99	-0.13	-0.64	-0.77	-0.31	0.95	0.97	-0.25	-1.01
-2.01	-1.13	-0.43	-0.90	-0.64	0.77	0.97	0.25	-0.19	-0.98	-0.81	0.59	0.88	0.48	-1.16
-1.88	-1.26	-0.31	-0.95	-0.81	0.59	0.81	0.59	0.31	-0.95	-1.00	-0.00	0.31	0.95	-1.29
-1.76	-1.38	-0.19	-0.98	-0.93	0.37	0.54	0.84	0.73	-0.68	-0.81	-0.59	-0.43	0.90	-1.40
-1.63	-1.51	-0.06	-1.00	-0.99	0.13	0.19	0.98	0.97	-0.25	-0.31	-0.95	-0.93	0.37	-1.46
-1.51	-1.51	0.06	-1.00	-0.99	-0.13	-0.19	0.98	0.97	0.25	0.31	-0.95	-0.93	-0.37	-1.46
-1.38	-1.38	0.19	-0.98	-0.93	-0.37	-0.54	0.84	0.73	0.68	0.81	-0.59	-0.43	-0.90	-1.40
-1.26	-1.26	0.31	-0.95	-0.81	-0.59	-0.81	0.59	0.31	0.95	1.00	-0.00	0.31	-0.95	-1.29
-1.13	-1.13	0.43	-0.90	-0.64	-0.77	-0.97	0.25	-0.19	0.98	0.81	0.59	0.88	-0.48	-1.16
-1.01	-1.01	0.54	-0.84	-0.43	-0.90	-0.99	-0.13	-0.64	0.77	0.31	0.95	0.97	0.25	-1.01
-0.88	-0.88	0.64	-0.77	-0.19	-0.98	-0.88	-0.48	-0.93	0.37	-0.31	0.95	0.54	0.84	-0.87
-0.75	-0.75	0.73	-0.68	0.06	-1.00	-0.64	-0.77	-0.99	-0.13	-0.81	0.59	-0.19	0.98	-0.73
-0.63	-0.63	0.81	-0.59	0.31	-0.95	-0.31	-0.95	-0.81	-0.59	-1.00	-0.00	-0.81	0.59	-0.61
-0.50	-0.50	0.88	-0.48	0.54	-0.84	0.06	-1.00	-0.43	-0.90	-0.81	-0.59	-0.99	-0.13	-0.50
-0.38	-0.38	0.93	-0.37	0.73	-0.68	0.43	-0.90	0.06	-1.00	-0.31	-0.95	-0.64	-0.77	-0.39
-0.25	-0.25	0.97	-0.25	0.88	-0.48	0.73	-0.68	0.54	-0.84	0.31	-0.95	0.06	-1.00	-0.27
-0.13	-0.13	0.99	-0.13	0.97	-0.25	0.93	-0.37	0.88	-0.48	0.81	-0.59	0.73	-0.68	-0.14
0.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	0.00
0.13	0.13	0.99	0.13	0.97	0.25	0.93	0.37	0.88	0.48	0.81	0.59	0.73	0.68	0.14
0.25	0.25	0.97	0.25	0.88	0.48	0.73	0.68	0.54	0.84	0.31	0.95	0.06	1.00	0.27
0.38	0.38	0.93	0.37	0.73	0.68	0.43	0.90	0.06	1.00	-0.31	0.95	-0.64	0.77	0.39
0.50	0.50	0.88	0.48	0.54	0.84	0.06	1.00	-0.43	0.90	-0.81	0.59	-0.99	0.13	0.50
0.63	0.63	0.81	0.59	0.31	0.95	-0.31	0.95	-0.81	0.59	-1.00	0.00	-0.81	-0.59	0.61
0.75	0.75	0.73	0.68	0.06	1.00	-0.64	0.77	-0.99	0.13	-0.81	-0.59	-0.19	-0.98	0.73
0.88	0.88	0.64	0.77	-0.19	0.98	-0.88	0.48	-0.93	-0.37	-0.31	-0.95	0.54	-0.84	0.87
1.01	1.01	0.54	0.84	-0.43	0.90	-0.99	0.13	-0.64	-0.77	0.31	-0.95	0.97	-0.25	1.01
1.13	1.13	0.43	0.90	-0.64	0.77	-0.97	-0.25	-0.19	-0.98	0.81	-0.59	0.88	0.48	1.16
1.26	1.26	0.31	0.95	-0.81	0.59	-0.81	-0.59	0.31	-0.95	1.00	-0.00	0.31	0.95	1.29
1.38	1.38	0.19	0.98	-0.93	0.37	-0.54	-0.84	0.73	-0.68	0.81	0.59	-0.43	0.90	1.40
1.51	1.51	0.06	1.00	-0.99	0.13	-0.19	-0.98	0.97	-0.25	0.31	0.95	-0.93	0.37	1.46
1.63	1.51	-0.06	1.00	-0.99	-0.13	0.19	-0.98	0.97	0.25	-0.31	0.95	-0.93	-0.37	1.46
1.76	1.38	-0.19	0.98	-0.93	-0.37	0.54	-0.84	0.73	0.68	-0.81	0.59	-0.43	-0.90	1.40
1.88	1.26	-0.31	0.95	-0.81	-0.59	0.81	-0.59	0.31	0.95	-1.00	0.00	0.31	-0.95	1.29
2.01	1.13	-0.43	0.90	-0.64	-0.77	0.97	-0.25	-0.19	0.98	-0.81	-0.59	0.88	-0.48	1.16
2.14	1.01	-0.54	0.84	-0.43	-0.90	0.99	0.13	-0.64	0.77	-0.31	-0.95	0.97	0.25	1.01
2.26	0.88	-0.64	0.77	-0.19	-0.98	0.88	0.48	-0.93	0.37	0.31	-0.95	0.54	0.84	0.87
2.39	0.75	-0.73	0.68	0.06	-1.00	0.64	0.77	-0.99	-0.13	0.81	-0.59	-0.19	0.98	0.73
2.51	0.63	-0.81	0.59	0.31	-0.95	0.31	0.95	-0.81	-0.59	1.00	-0.00	-0.81	0.59	0.61
2.64	0.50	-0.88	0.48	0.54	-0.84	-0.06	1.00	-0.43	-0.90	0.81	0.59	-0.99	-0.13	0.50
2.76	0.38	-0.93	0.37	0.73	-0.68	-0.43	0.90	0.06	-1.00	0.31	0.95	-0.64	-0.77	0.39
2.89	0.25	-0.97	0.25	0.88	-0.48	-0.73	0.68	0.54	-0.84	-0.31	0.95	0.06	-1.00	0.27
3.02	0.13	-0.99	0.13	0.97	-0.25	-0.93	0.37	0.88	-0.48	-0.81	0.59	0.73	-0.68	0.14
	Coeff. A_0	Coeff. A_1	Coeff. B_1	Coeff. A_2	Coeff. B_2	Coeff. A_3	Coeff. B_3	Coeff. A_4	Coeff. B_4	Coeff. A_5	Coeff. B_5	Coeff. A_6	Coeff. B_6	
	0.00	-0.00	1.27	-0.00	-0.00	-0.00	-0.14	0.00	0.00	0.00	0.05	-0.00	0.00	



L'intervallo $[-\pi, \pi]$ è stato suddiviso in 50 parti uguali: nella prima colonna (verde) ci sono i punti (equidistanti) t_i della suddivisione, nella seconda i valori di una certa funzione f calcolata nei punti t_i: la funzione può essere facilmente cambiata, nell'esempio si tratta di un'onda triangolare.

Le colonne successive contengono nell'ordine i valori di $\cos t_i$, $\sin t_i$,$\cos 2t_i$, $\sin 2t_i$,$\cos 3t_i$, $\sin 3t_i$,$\cos 4t_i$, $\sin 4t_i$,$\cos 5t_i$, $\sin 5t_i$,$\cos 6t_i$, $\sin 6t_i$, necessari per calcolare i coefficienti di Fourier approssimati $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5, a_6, b_6$.

Questi coefficienti approssimati vengono calcolati nella riga gialla in basso. Infine, nella colonna rossa a destra viene calcolato il valore del polinomio trigonometrico approssimante avente quei coefficienti. La funzione da approssimare e il polinomio trigonometrico approssimante sono raffigurate nel grafico (in blu e in rosso rispettivamente).

Con il foglio Excel, è possibile fare un po' di prove cambiando la funzione: i risultati sono abbastanza soddisfacenti.

Si scopre anche una cosa *alquanto sorprendente*: se la funzione di partenza è un polinomio trigonometrico di grado ≤ 6, i suoi coefficienti di Fourier *vengono ricostruiti esattamente*: si può provare ad esempio con le funzioni $\sin t$, $\cos 4t$, $\cos t + 0.5 \sin 3t + 0.2 \cos 6t$, o un'altra a vostro piacimento. A priori, è difficile aspettarsi una cosa del genere: la nostra approssimazione degli integrali è stata infatti molto grezza! Si tratta di un piccolo "miracolo algebrico" che dipende dalla distribuzione dei valori delle funzioni seno e coseno nei punti di una suddivisione in parti uguali di $[-\pi, \pi]$: la cosa rimane vera anche se si diminuisce il numero $2K$ dei punti di suddivisione, purché esso rimanga > 12.

In effetti, la nostra approssimazione *apparentemente grezza* dei coefficienti di Fourier, è un oggetto che gode di una sua autonoma (e notevole) dignità matematica, e di tutta una sfilza di ottime proprietà: è chiamata *Trasformata di Fourier Discreta (DFT: Discrete Fourier Transform)* ed è uno strumento fondamentale nell'analisi matematica dei segnali!

Usiamo il metodo visto sopra per calcolare i coefficienti di Fourier dell'oboe...

Proviamo ad applicare il metodo di prima per risolvere un problema "reale": vogliamo calcolare i primi coefficienti di Fourier (approssimati) corrispondenti alla forma d'onda dell'oboe "periodicizzato".

Con Audacity, è possibile selezionare una sola oscillazione completa del segnale dell'oboe, e poi salvarla in formato *.raw*. In questo modo otteniamo un *brevissimo* file audio (circa 1.9ms di suono!) in cui il segnale è registrato come segue: il periodo di 1.9ms è stato diviso in 85 parti uguali (il campionamento avviene 44100 volte al secondo...e si da il caso che in un periodo del nostro oboe capitino esattamente 85 campioni!). Per ciascuno di questi 85 istanti temporali il valore del segnale viene misurato, ridotto con un semplice cambio di scala a un numero intero compreso tra -32768 e +32767, e registrato sul file.

Più precisamente, in ognuno degli 85 istanti temporali viene rilevato sia il valore del *canale sinistro* che quello del *canale destro*, perché il suono viene registrato in formato stereo: i due valori sono registrati nel file uno di seguito all'altro.

Ecco cosa possiamo leggere nel nostro file binario[2]:

0000000	-3763	-3963	-3572	-3773	-3177	-3373	-2577	-2759
0000020	-1802	-1954	-950	-1063	-123	-190	656	635
0000040	1381	1409	2029	2103	2563	2686	2934	3085
0000060	3091	3260	3045	3216	2848	3010	2534	2687
0000100	2127	2264	1682	1799	1213	1295	720	764
0000120	257	249	-121	-171	-407	-481	-631	-699
0000140	-847	-892	-1126	-1132	-1471	-1432	-1821	-1736
0000160	-2100	-1974	-2245	-2096	-2227	-2074	-2042	-1908
0000200	-1716	-1627	-1256	-1220	-687	-694	-26	-59
0000220	655	622	1254	1258	1710	1763	1996	2105
0000240	2139	2306	2199	2410	2223	2469	2231	2490
0000260	2215	2474	2162	2395	2051	2252	1881	2039
0000300	1650	1784	1356	1476	977	1093	506	628
0000320	-18	114	-545	-405	-1014	-867	-1348	-1207
0000340	-1529	-1400	-1572	-1471	-1498	-1432	-1299	-1279
0000360	-970	-997	-514	-573	49	-34	623	536
0000400	1127	1050	1519	1461	1753	1725	1801	1805
0000420	1684	1709	1435	1462	1075	1066	646	581
0000440	210	66	-199	-419	-547	-841	-815	-1162
0000460	-1072	-1465	-1392	-1798	-1769	-2160	-2178	-2539
0000500	-2621	-2934	-3056	-3321	-3429	-3654	-3688	-3892
0000520	-3764	-3964						

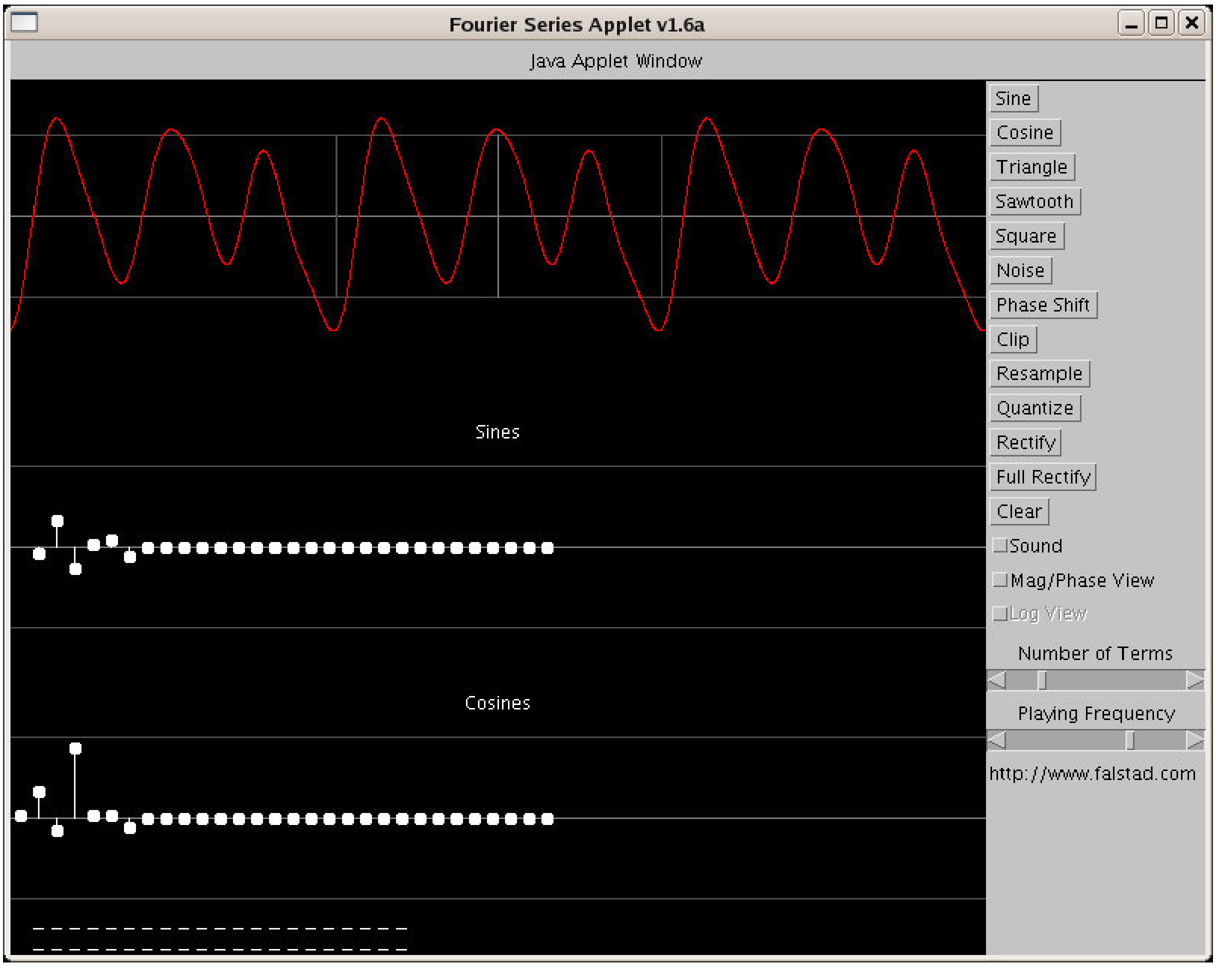
Siccome siamo interessati solo alla forma d'onda, ci disinteressiamo del canale destro e leggiamo solo i livelli corrispondenti al canale sinistro: essi sono dunque -3763,-3572,-3177,-2577...

Copiamo questi valori in una tabella excel simile a quella usata in precedenza (con la differenza che questa volta le righe di dati sono 85): il risultato si vede nel file http://www.science.unitn.it/~baldo/divulgazione/dft_excel_oboe.xls.

Dai grafici si vede che i coefficienti di Fourier calcolati permettono di ricostruire assai bene la forma d'onda. Per verificare se la ricostruzione è buona anche dal punto di vista acustico, possiamo riportare i coefficienti di Fourier da noi calcolati[3] nell'applet di Falstad, come in figura:

[2]La tabella è stata ottenuta con il comando unix: od -td2 oboe.raw

[3]opportunamente divisi per 2500...per riportarli nella scala accettata dall'applet!



Il suono prodotto dall'applet è una ragionevole imitazione del suono originale dell'oboe!