Ancora da Sisto ai Matefisicimusicisti:
Ora che abbiamo "ottenuto" la distanza L^2, cosa possiamo farci?

Carissimi, voglio provare ad abbozzare una delle possibili prosecuzioni del discorso che ho iniziato nel documento distanza.pdf...

Questa volta voglio essere sintetico, in modo che sia possibile discutere assieme sui SE e sui COME dell'inserimento di questo materiale (o di parte di esso) nel nostro laboratorio. In particolare, il mio scopo è solo di mostrarvi che buona parte della matematica che riguarda la teoria delle serie di Fourier NON È INCOMPATIBILE con le conoscenze che si possono avere in una scuola superiore: se poi vorremo effettivamente implementarla nel laboratorio, bisognerà creare tutta una cornice di motivazioni, esercizi, stimoli, chi più ne ha più ne metta. Qualche idea ce l'ho anche su questo...ma voglio prima sentire le vostre ;-)

Dunque, il mio documento precedente mirava a mostrare, in modo semplice e "sperimentale", che le somme parziali della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nt)$$

convergono *nella distanza* $L^2(2\pi)$ ad una funzione a dente di sega. Per introdurre la distanza L^2 (che NON abbiamo chiamato così, e non sarà il caso di chiamare così...), siamo stati costretti ad introdurre il concetto di integrale di una funzione positiva (soltanto come interpretazione geometrica).

Giunti a questo punto, si potrebbe vendere ai ragazzi anche il concetto di integrale come "area con segno" per funzioni di segno qualunque...e anche convincerli che quest'oggetto è lineare, cioè che

$$\int_{-\pi}^{\pi} cf(t)\ dt = c\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} (f(x)+g(x))\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\ dt.$$

Questo ci consentirebbe di entrare nel pieno della mischia:

- *Relazioni di ortogonalità del seno e del coseno:* A questo punto avremmo tutti gli strumenti per ottenere le relazioni di ortogonalità: se $(m, n = 1, 2, 3 \ldots)$ valgono le relazioni

$$(*) \qquad \begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\ \cos(mt) = \begin{cases} \pi & se\ m = n \\ 0 & se\ m \neq n \end{cases} \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\ \sin(mt) = \begin{cases} \pi & se\ m = n \\ 0 & se\ m \neq n \end{cases} \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\ \sin(mt) = 0 \end{aligned}$$

Bisognerebbe trovare un modo accattivante per motivare i ragazzi a fare questo "esercizio"...visto che noi sappiamo quanto sia utile e importante, ma loro non lo sanno! Dopo tutto, però, può avere un certo appeal anche mostrare che è possibile calcolare degli integrali apparentemente "complicati" senza conoscere alcuna tecnica di integrazione.

L'osservazione chiave per fare l'esercizio è la seguente: per ogni $n = 1, 2, 3, \ldots$ si ha, grazie alle simmetrie di seno e coseno,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) = 0.$$

A questo punto, per esempio, la prima relazione di ortogonalità può essere ottenuta grazie alla formula di addizione/prostaferesi:

$$\cos(nt)\ \cos(mt) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)t + \cos(m+n)t\right].$$

- *Come ricostruire i coefficienti di un polinomio trigonometrico?* L'applet java di R.Falstad ha reso evidente che sommando seni e coseni con frequenze sempre più alte, si ottengono funzioni dal grafico anche molto incasinato. Se qualcuno ci passa la "fotografia" del grafico di una di queste funzioni $f(t)$, e ci dice che lo ha ottenuto sommando le funzioni

  $$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos 6t, \sin 6t$$

  con opportuni coefficienti reali che però ha dimenticato, c'è un modo di *ricostruire i coefficienti* senza procedere per tentativi? La ricostruzione per tentativi giocando con gli slider dell'applet di Falstad sarebbe infatti disperata, perché abbiamo ben 13 coefficienti incogniti da determinare! Ebbene, la nostra equazione è

  $$f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + \ldots + a_6 \cos 6t + b_6 \sin 6t,$$

  con incognite $a_0, a_1, b_0, b_1, \ldots$. Se integriamo ambo i membri tra $-\pi$ e π troviamo a_0. In modo analogo, e grazie alle relazioni di ortogonaliià, troviamo gli altri coefficienti: per esempio, moltiplicando l'equazione per $\sin 4t$ e integrando troviamo $\pi b_4 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin 4t\ dt$, e abbiamo determinato b_4...

  Insomma, in generale scopriamo che se

  $$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos nt + b_n \sin nt],$$

allora

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi} \pi f(t)\cos nt\, dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi} \pi f(t)\sin nt\, dt.$$

C'è da dire onestamente che questo NON è l'unico modo di ricostruire i coefficienti di Fourier di un polinomio trigonometrico: ad esempio, se N è noto a priori si possono determinare i coefficienti con una DFT di ordine $2N+1$...La DFT sarebbe anch'essa un argomento affascinante (ed avrebbe il vantaggio di non richiedere il calcolo di integrali)... ma trovo che rischia di essere un oggetto davvero troppo misterioso! Inoltre, è la serie di Fourier e non la trasformata di Fourier discreta ad essere legata così strettamente alla fisica delle vibrazioni acustiche e alla fisiologia del nostro orecchio interno.

- *Approssimazione ottimale di una funzione periodica "qualunque" con polinomi trigonometrici:* Supponiamo adesso di prendere una *qualunque* funzione $f(t)$ periodica di periodo 2π. La funzione non dovrà essere eccessivamente schifosa, in modo che sia possibile calcolarne l'integrale[1].

  Ci chiediamo come sia possibile approssimare f *in modo ottimale* usando polinomi trigonometrici di "grado" N (o con N armoniche), cioè con funzioni del tipo

  $$(**) \quad g(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{N}[a_n \cos n + b_n \sin nt],$$

  dove $a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ sono $2N+1$ coefficienti da scegliere nel modo migliore possibile. Il discorso sulla ricostruzione dei coefficienti di un polinomio trigonometrico suggerisce, almeno a titolo euristico, che FORSE una buona approssimazione si ottiene scegliendo i coefficienti di Fourier: in altre parole, prendendo quel *particolare polinomio trigonometrico di grado N*

  $$\tilde{g}(t) = \tilde{a}_0/2 + \sum_{n=1}^{N}[\tilde{a}_n \cos n + \tilde{b}_n \sin nt],$$

[1]La regolarità richiesta per i discorsi che seguono è veramente minima: basta che la funzione sia L^2, cioè Lebesgue misurabile e a quadrato sommabile. Ai nostri fanciulli potremmo dire che prendiamo una funzione non troppo folle, in modo che sia possibile definirne l'integrale: tanto, nel loro arsenale di esempi i casi patologici "non esistono"!

i cui coefficienti sono definiti da

$$(III) \qquad \tilde{a}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi} \pi f(t)\cos nt\; dt, \quad \tilde{b}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi} \pi f(t)\sin nt\; dt,$$
$$n = 0, 1, \ldots, N$$

abbiamo un naturale candidato ad essere una buona approssimazione della funzione f.

In realtà, il polinomio $\tilde{g}$ è proprio *il migliore di tutti*: tra tutti i polinomi trigonometrici di grado N, è quello di *distanza minima* dalla funzione data f. Ovviamente, la distanza è quella L^2 vista nel documento precedente!

La cosa bella è che si può raggiungere questo risultato andando *esplicitamente* a minimizzare la distanza, senza dover affatto ricorrere ai discorsi euristici che precedono...Avremo bisogno soltanto della definizione di distanza, della linearità dell'integrale e delle relazioni di ortogonalità.

Prendiamo dunque un *qualunque* polinomio trigonometrico come in $(**)$, ed andiamo a scrivere la sua distanza (al quadrato) dalla funzione da approssimare f:

$$
\begin{aligned}
(IV) \quad d(g,f)^2 \quad &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - g(t))^2\; dt = \\
\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - a_0/2 \quad &- \quad a_1 \cos t - a_2 \cos 2t - \ldots - a_N \cos Nt \\
&- \quad b_1 \sin t - b_2 \sin 2t - \ldots - b_N \sin Nt)^2\; dt
\end{aligned}
$$

Come "aperitivo", vediamo cosa succede per $N = 1$ (cioè se stiamo tentando di approssimare f con un polinomio trigonometrico del tipo $g(t) = a_0/2 + a_1 \cos t + b_1 \sin t$, cioè con una funzione *sinusoidale pura* alla frequenza fondamentale): ovviamente non possiamo sperare in un'approssimazione troppo buona, ma i conti sono estremamente semplificati in quanto abbiamo solo tre coefficienti...ed avremo ottime indicazioni su come fare nel caso generale!

Facciamo il conto sviluppando il quadrato (senza dimenticarci dei doppi prodotti!) e ricordando che l'integrale della somma è la somma degli integrali, e che le costanti si possono portare fuori dal segno di integrale:

$$[d(f,g)]^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - \frac{a_0}{2} - a_1 \cos t - b_1 \sin t)^2 =$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)^2 + \frac{a_0^2}{4} + a_1^2 \cos^2 t + b_1^2 \sin^2 t - a_0 f(t) - 2a_1 f(t) \cos t +$$
$$-2b_1 f(t) \sin t + a_0 a_1 \cos t + a_0 b_1 \sin t + 2a_1 b_1 \sin t \cos t] =$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 + \frac{a_0^2}{4} \int_{-\pi}^{\pi} 1 + a_1^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t + b_1^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t +$$
$$-a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(t) - 2a_1 \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t - 2b_1 \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t +$$
$$+a_0 a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos t + a_0 b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin t + 2a_1 b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t$$

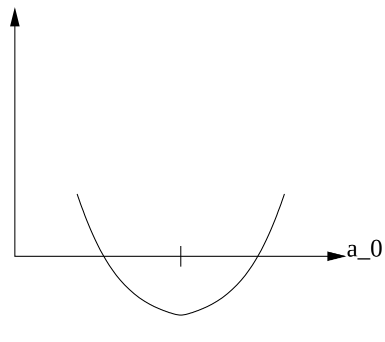
Ora, se ci ricordiamo delle relazioni di ortogonalità e della definizione dei coefficienti di Fourier di f, vediamo che siamo in grado di calcolare tutti e dieci gli integrali che compaiono nell'ultima espressione (tranne il primo che lasciamo scritto allo stesso modo): essi valgono nell'ordine

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2,\ 2\pi,\ \pi,\ \pi,\ \pi\tilde{a}_0,\ \pi\tilde{a}_1,\ \pi\tilde{b}_1,\ 0,\ 0,\ 0.$$

Sostituendo nel notro contaccio vediamo quindi che si ha

$$[d(f,g)]^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 + \pi[\frac{1}{2}(a_0^2 - 2a_0\tilde{a}_0) + (a_1^2 - 2a_1\tilde{a}_1) + (b_1^2 - 2b_1\tilde{b}_1)].$$

Il compito che ci siamo proposti è quello di determinare i valori di a_0, a_1 e b_1 che rendono minima questa distanza, *cioè che rendono minima ciascuna delle tre espressioni tra parentesi tonde nell'ultima espressione!* Ora, non è difficile disegnare il grafico della funzione $(a_0^2 - 2a_0\tilde{a}_0)$ al variare del coefficiente a_0: si tratta di una parabola rivolta verso l'alto



Il vertice della parabola si ha per $a_0 = \tilde{a}_0$, quindi la nostra espressione è minima quando $a_0 = \tilde{a}_0$, e in tal caso vale $-\tilde{a}_0^2$. Analogamente, le altre due espressioni (che guarda caso hanno la stessa forma) sono minime rispettivamente quando $a_1 = \tilde{a}_1$ e $b_1 = \tilde{b}_1$, cioè quando i coefficienti del nostro "polinomio trigonometrico di grado 1" coincidono con i coefficienti di Fourier! E in tal caso la distanza minima vale

$$[d(f, \tilde{g})]^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 - \pi(a_0^2/2 - a_1^2 - b_1^2).$$

Il conto nel caso generale di un polinomio trigonometrico di grado N è sostanzialmente identico: se ci armiamo di estrema pazienza e andiamo a sviluppare il quadrato nell'espressione (IV), usando le relazioni di ortogonalità e le definizioni dei coefficienti di Fourier scopriremo che

$$(V) \qquad d(f,g)^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\, dt + \\ \pi[\frac{1}{2}(a_0^2 - 2a_0\tilde{a}_0) + (a_1^2 - 2a_1\tilde{a}_1) + (a_2^2 - 2a_2\tilde{a}_2) + \\ \ldots + (b_N^2 - 2b_N\tilde{b}_N)].$$

Per minimizzare questa distanza ragioniamo esattamente come abbiamo fatto nel caso più semplice, e scopriamo che dobbiamo scegliere nell'ordine $a_0 = \tilde{a}_0$, $a_1 = \tilde{a}_1$,…,$a_N = \tilde{a}_N$, $b_1 = \tilde{b}_1$, …, $b_N = \tilde{b}_N$: il polinomio trigonometrico che ha distanza minima da f è proprio il polinomio di Fourier $\tilde{g}$, e questa distanza minima vale

$$d(f, \tilde{g})^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\, dt - \pi[\frac{\tilde{a}_0^2}{2} + \tilde{a}_1^2 + \ldots + \tilde{a}_N^2 + \tilde{b}_1^2 + \ldots + \tilde{b}_N^2].$$

- *Aumentando il numero N di armoniche, l'approssimazione migliora... Ma il processo converge?* Dal discorso precedente, è ovvio che all'aumentare di N i polinomi di Fourier daranno approssimazioni sempre migliori (o almeno non peggiori) di f (questo perché un polinomio trigonometrico di grado N può essere visto come un "caso particolare" di polinomio di grado $N + 1$, in cui i coefficienti di $\cos(N + 1)t$ e di $\sin(N + 1)t$ valgono 0).

  Che questo processo *converga*, cioè che la distanza tra polinomio trigonometrico approssimante e funzione approssimata può essere resa arbitrariamente piccola scegliendo N sufficientemente grande, può essere reso plausibile *sperimentalmente*, con applet java o altri ausili informatici... vi ho già fatto vedere un mio patetico tentativo!

Purtroppo, la *dimostrazione* rigorosa della convergenza del metodo non è affatto difficile...ma richiede un bel po' di teoria elementare degli spazi di Hilbert: non è proprio il caso di pensarci! La cosa è però proponibile a livello di enunciati (che possono riguardare anche la convergenza puntuale delle serie di Fourier).

APPENDICE: Perché le relazioni di ortogonalità si chiamano così? Prodotto scalare tra funzioni ed interpretazione geometrica delle serie di Fourier.

A questo punto gli utenti più smaliziati si saranno certamente chiesti perché cavolo le relazioni di ortogonalità si chiamano così.

Sappiamo che due vettori (del piano o dello spazio) sono ortogonali se il loro prodotto scalare si annulla. Ma cosa centrano le funzioni coi vettori?

Se ci si pensa bene, quando abbiamo definito la distanza tra due funzioni ci siamo ispirati alla distanza tra punti del piano o dello spazio, pensando la funzione come un "oggetto con infinite coordinate"...Non dimentichiamo che i punti del piano o dello spazio possono sempre essere visti come vettori (con la "coda" nell'origine e la "punta" nel punto considerato).

Anche le funzioni hanno delle proprietà che ricordano i vettori: esattamente come possiamo sommare due vettori o moltiplicarli per un numero reale (scalare), così possiamo sommare due funzioni o moltiplicarle per un numero reale.

Tra i vettori del piano (o dello spazio) esiste una ben nota "operazione" che si chiama prodotto scalare, che fornisce come risultato un numero: il prodotto scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ di due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è per definizione il prodotto delle loro lunghezze per il coseno dell'angolo compreso[2]. Evidentemente, due vettori sono ortogonali se e soltanto se il loro prodotto scalare si annulla.

Il prodotto scalare gode di alcune proprietà, tra le quali:

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$;

---

[2] Alcuni degli allievi magari conosceranno anche la forma cartesiana del prodotto scalare: se $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, allora $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$. Questa conoscenza è utilissima, ma non indispensabile per i discorsi che seguono.Comunque, si può ricavare facilmente dalle proprietà di linearità del prodotto scalare. Oppure si può *definire* il prodotto scalare con questa formula, e mostrare che si caratterizza come detto sopra (basta appliare il teorema di Carnot al triangolo individuato dai due vettori...).

- $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}$ per ogni $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}$;
- $(c\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = c\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ per ogni $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e per ogni scalare c;
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 = d(\mathbf{v}, 0)$ per ogni $\mathbf{v}$.

L'ultima delle proprietà elencate lega il prodotto scalare alla distanza euclidea: il prodotto scalare di un vettore per se stesso è il quadrato della sua lunghezza, ossia la distanza della "punta" del vettore dall'origine. Inoltre, la distanza tra due punti del piano corrispondenti ai "vettori posizione" $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è data da $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = |\mathbf{v} - \mathbf{w}|^2$.

Date due funzioni continue e 2π-periodiche, possiamo definire il loro *prodotto scalare* come segue:

$$< f, g >:= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t).$$

Questo oggetto gode di tutte le proprietà del breve elenco che abbiamo fatto per il prodotto scalare di vettori nel piano o nello spazio, come è immediato verificare: la nostra definizione è quindi ragionevole[3].

Con questa definizione di prodotto scalare, le relazioni di ortogonalità dicono proprio che le funzioni

$$\cos t, \cos 2t, \ldots, \cos Nt, \;\; \sin t, \sin 2t, \ldots, \sin Nt$$

sono tutte ortogonali tra di loro (e che la loro distanza dall'origine è $\sqrt{\pi}$).

L'ortogonalità ha molto a che fare con i problemi di minima distanza: per esempio, data una retta r nel piano ed un punto P fuori di essa, il punto di r che ha minima distanza da P si ottiene prendendo la proiezione ortogonale di P su r: un fatto analogo si ha nello spazio, quando si cerca di trovare il punto appartenente ad un piano o ad una retta che ha distanza minima da un punto assegnato. D'altra parte, l'insieme dei *polinomi trigonometrici di grado N* può essere visto come l'analogo di un "piano" nello *spazio delle funzioni continue e 2π-periodiche* perché questo oggetto ha in comune con un piano Π (passante per l'origine) nello spazio tridimensionale le seguenti caratteristiche:

- la somma di due polinomi trigonometrici di grado N è ancora un polinomio trigonometrico dello stesso tipo: analogamente, la somma di due vettori appartenenti ad un piano passante per l'origine appartiene ancora allo stesso piano;

[3] Oppure possiamo dare la definizione "per analogia" con la forma cartesiana del prodotto scalare in $\mathbf{R}^2$ e in $\mathbf{R}^3$, facendo un discorso simile a quello usato per arrivare alla definizione di distanza.

- un multiplo reale di un polinomio trigonometrico di grado N è ancora un polinomio trigonometrico dello stesso tipo: analogamente, ogni multiplo reale di un vettore dello spazio che appartienga a un piano passante per l'origine, appartiene ancora a quel piano.

Un insieme di questo tipo si chiama *sottospazio lineare*: i polinomi trigonometrici di grado N sono un esempio di sottospazio lineare nello "spazio" delle funzioni continue e 2π-periodiche.

Data una funzione f di periodo 2π, il suo polinomio di Fourier di grado N $\tilde{g}$ è proprio la proiezione ortogonale di f sul sottospazio lineare dei polinomi trigonometrici di grado N (ed è quindi l'elemento più vicino a f di tale sottospazio): per verificarlo, basta far vedere che $f(t) - \tilde{g}(t)$ è ortogonale a tutti i polinomi trigonometrici di grado N. Questo, a sua volta, è vero se e solo se

$$< f(t) - \tilde{g}(t), \cos nt >=< f(t) - \tilde{g}(t), \sin nt >= 0 \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Ora, un conto diretto usando le relazioni di ortogonalità mostra che l'unico polinomio trigonometrico di grado N che verifica queste identità è proprio il polinomio di Fourier!