Appunti per l'incontro del laboratorio di "Fisica, Matematica e Musica", Trento, Liceo L. da Vinci, 16/2/2006

Sisto Baldo, Dip. Mat. UniTN

In questo incontro vogliamo divertirci a capire cosa si ottiene se sommiamo *funzioni sinusoidali* con frequenze multiple di quella di $\sin t$.

Questa scelta a prima vista potrebbe sembrare poco eccitante, se il nostro scopo è quello di passare un pomeriggio divertente che ci faccia progredire nella comprensione dei fenomeni acustici e musicali... ma spero di convincervi che questa impressione è sbagliata!

Innanzitutto, nei primi due incontri del laboratorio abbiamo visto che le funzioni periodiche, e tra queste le funzioni sinusoidali, ricorrono con grande...frequenza nella "produzione" di note musicali. Ricordate, per esempio, il diapason scrivente del Prof. Gratton? La traccia lasciata sulla carta carbone aveva decisamente la forma di una sinusoide che andava smorzandosi rapidamente nel tempo.

E che dire dei "modi stazionari di vibrazione" di una corda vibrante? Credo che ricordiate l'esperimento: un altoparlante imprimeva una vibrazione sinusoidale con frequenza regolabile a piacere ad una corda tesa e fissata ai suoi estremi. Abbiamo visto che in genere la corda rispondeva poco alle sollecitazioni dell'altoparlante, a meno che la *frequenza* dei movimenti di questo non fosse multipla di un certo valore "base", dipendente dalla massa e dalla tensione della corda. In altre parole, una corda vibrante possiede dei "modi spontanei" (detti *modi stazionari*) di vibrazione a frequenze *multiple di una frequenza fondamentale*. Si può poi verificare che la legge con la quale un dato punto della corda va "su e giù" è sinusoidale!

Le figure che seguono mostrano la vibrazione della corda alla frequenza fondamentale e al suo doppio, triplo e nonuplo: il movimento in verticale è volutamente esagerato.

Un fenomeno di questo tipo non si verifica solo per la corda vibrante (che troviamo in un grandissimo numero di strumenti musicali: chitarra, archi, clavicembalo, pianoforte, arpa...), ma anche per la *colonna d'aria* messa in vibrazione negli strumenti a fiato: anche questa ha una frequenza fondamentale di vibrazione, e può vibrare "facilmente" anche alle frequenze multiple.

Ora, cosa succede se pizzichiamo una corda di chitarra? A meno che non lo si faccia esattamente nel punto centrale della corda, e con grandissima attenzione, è probabile che che si vada ad eccitare *più di un modo stazionario* di vibrazione della corda contemporaneamente: il suono che giungerà al nostro orecchio sarà quindi la somma di una vibrazione alla frequenza fontamentale, più un'altra (probabilmente con minore ampiezza) alla frequenza doppia, una alla frequenza tripla e così via. Una cosa analoga succede quando tocchiamo un tasto del pianoforte, quando passiamo l'archetto su una corda di violino, o quando immettiamo aria compressa in una canna d'organo: in ogni caso otteniamo una sovrapposizione di sinusoidi con frequenze multiple di quella *fondamentale* che caratterizza la nota che abbiamo scelto: per esempio, il La centrale del pianoforte "contiene" una sinusoide alla frequenza fondamentale di 440 Hz, cui si sommano vibrazioni sinusoidali (dette *armoniche*) a frequenza doppia, tripla, quadrupla etc...

La presenza delle armoniche e la loro relativa intensità è una componente fondamentale di quello che chiamiamo il *timbro* di uno strumento musicale. Sentiamo per esempio una nota con uguale altezza ed intensità, emessa da un oboe, da un violino e da una tromba:

Nei nostri incontri spero di riuscire a convincervi che una delle ragioni per cui il suono dei tre strumenti musicali appare così diverso, è la diversa intensità delle armoniche presenti nei tre suoni.... Ma cominciamo a fare un po' di matematica!

Facciamo una piccola semplificazione: scelta la nostra nota (per esempio il La^4 a 440Hz), introduciamo un'unità di tempo arbitraria in modo che il periodo di oscillazione della nota sia esattamente 2π... Se chiamiamo u la nostra unità di tempo, avremo dunque la relazione $2\pi \cdot 440u = 1s$. In questo modo, la legge oraria (sinusoidale!) del suono emesso da un diapason accordato a 440Hz sarà del tipo $A\cos(t-\phi)$, dove il tempo t è misurato in unità u.

La quantità ϕ si chiama *angolo di fase* e deve essere introdotta perchè non è detto che l'oscillazione "cominci" esattamente al tempo 0: il grafico della nostra cosinusoide dovrà quindi essere traslato di un po' sull'asse dei tempi!

La fondamentale e le armoniche emesse da uno strumento musicale che suona il nostro La^4 (che avranno frequenze multiple di 440Hz), avranno quindi leggi orarie del tipo

$$(*)\ A_n\cos(nt-\phi_n), \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Notiamo subito che, grazie alle formule di addizione per il coseno, la legge oraria $(*)$ può essere riscritta

$$(**)\ a_n\cos nt + b_n \sin nt,$$

con $a_n = A_n\cos\phi_n$, $b_n = A_n \sin\phi_n$.

Viceversa, data una legge oraria del tipo (**), tracciamo nel piano cartesiano il punto $P = (a_n, b_n)$ e chiamiamo $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ la distanza di P dall'origine, ϕ_n l'angolo formato dal semiasse delle x positive con la semiretta $\overline{OP}$. Allora l'espressione (**) può essere riscritta nella forma (*).

Riassumendo brevemente, le scoperte che abbiamo fatto fin'ora sono le seguenti: la legge oraria del suono corrispondente ad una nota (per esempio il La^4), emessa da un dato strumento musicale "reale", può essere scritta come somma di espressioni del tipo

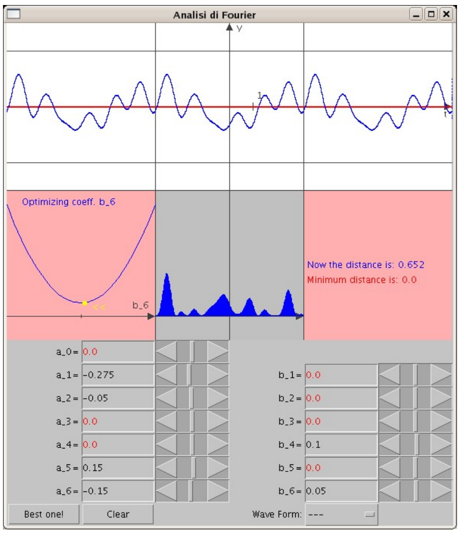
$$a_n \cos nt + b_n \sin nt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

dove a_n e b_n sono costanti caratteristiche dello strumento. Inoltre, l'ampiezza A_n dell'n-esima armonica è data dalla formula $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Una domanda sorge spontanea: quali sono le possibili forme dei grafici di somme di questo tipo? In altre parole, quali forme d'onda possiamo ottenere sommando espressioni del tipo (*) o (**), cioè funzioni sinusoidali con periodo che sia un sottomultiplo intero di 2π?

Altra questione: supponiamo di generare una nota in modo elettronico. Possiamo cosìottenere come forma d'onda una qualsiasi funzione periodica di periodo 2π (con la solita scelta dell'unità di tempo...). E' vero che anche questa può essere vista come somme di funzioni sinusoidali? E se questo è possibile, è anche rilevante per le nostre sensazioni acustiche?

Cominciamo con un approccio biecamente sperimentale: ho scritto un programmino java che, tra le altre cose, permette di visualizzare la somma di funzioni del tipo (**), con n compreso tra 1 e 6, scegliendo liberamente i dodici parametri $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5, a_6, b_6$ tra -1 e 1... più un tredicesimo parametro a_0 che è semplicemente una costante che trasla in grafico in alto o in basso sull'asse verticale. La figura seguente mostra l'applet in azione:

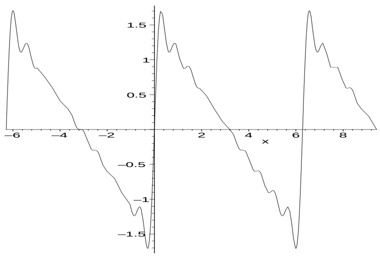


Giocando un po', vediamo che si possono ottenere delle forme d'onda veramente bizzarre! Nel corso dei nostri incontri, spero di convincervi che, in realtà, sommando (eventualmente infinite) funzioni del tipo (∗∗), possiamo ottenere *qualsiasi* forma d'onda di periodo 2π, purché essa abbia un grafico abbastanza decente da poter essere disegnato... E, soprattutto, spero di farvi vedere qualcuno dei legami tra questo fatto "matematico" e la nostra percezione del timbro degli strumenti musicali.

Tra i vari esperimenti che si possono fare con l'applet java, o con programmi di calcolo simbolico come *Derive*, ce n'è uno talmente semplice che potrebbe persino capitare di farlo per sbaglio: cosa succede se sommo funzioni seno di frequenza multipla, con ampiezza che decresce come 1/n? In altre parole, che "bestia" è una funzione del tipo

$$f_n(t) = \sin(t) + 1/2\sin(2t) + 1/3\sin(3t) + 1/4\sin(4t) + \ldots + 1/n\sin(nt)?$$

Se proviamo a riprodurre questa situazione, otteniamo una forma d'onda che al crescere di n assomiglia sempre di più a un dente di sega: la figura che segue l'ho ottenuta con Maple per $n = 10$.

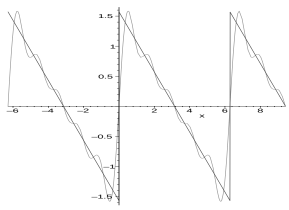


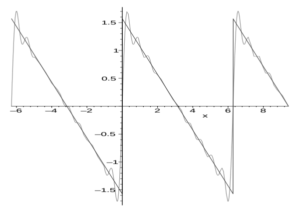
Insomma, non è troppo difficile congetturare che la nostra somma di seni ha un grafico che assomiglia sempre di più a una funzione $f(t)$ che

- è periodica di periodo 2π e dispari,
- in $t = 0$ salta tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ (si osservino i numerini sugli assi...), mentre tra 0 e π abbiamo $f(t) = \frac{\pi}{2} - t/2$[1].
- non è chiarissimo quanto valga f per $t = 0$...Però, visto che le f_n valgono tutte 0 nell'origine, è ragionevole attribuire lo stesso valore anche a f.

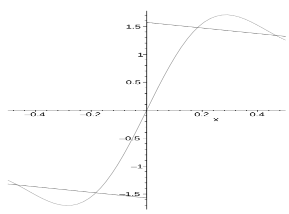
Riassumendo, l'impressione è che le somme di seni $f_n(x)$, al crecere di n, si "avvicinino sempre di più" alla funzione a dente di sega: impressione che diventa ancora più forte se sovrapponiamo i grafici. Le due figure seguenti mostrano cosa succede se sovrapponiamo i grafici di f_5 e f_{10} a quello del dente di sega $f(t)$:

[1]Non è quindi difficile scrivere l'equazione del "dente di sega" a pezzi... Se volete invece un'espressione algebrica "secca" che mi dia la funzione, eccola: $f(t) = \arctan(1/\tan(t/2))$





In che senso la funzione $f_n(t)$ è sempre più vicina alla funzione $f(t)$? Verrebbe da dire che il grafico di f_n è sempre più vicino al grafico di f... Questo è *quasi* vero, tranne che vicino ai punti di discontinuità: ecco un ingrandimento dell'ultima figura vicino a $t = 0$ (attenzione: il rapporto di scala tra gli assi è cambiato!)



Visto che il "tratto verticale" *non appartiene* al grafico di f (non siete convinti? Pensate alla *definizione* di funzione...), vediamo che i due grafici non sono affatto vicini, e non lo sarebbero (non potrebbero esserlo) neanche se prendessi un n molto più grande.

Occorre quindi scoprire un modo di misurare la "distanza tra funzioni" che ci dica che f_n e f sono "vicine", e che lo sono sempre di più man mano che n cresce: in fondo, non possiamo mica smettere di credere ai nostri occhi (e orecchie: abbiate un attimo di pazienza...)!

Per definire la distanza tra f_n e f ci possiamo ispirare alla distanza euclidea tra punti del piano e dello spazio, individuati attraverso le loro coordinate cartesiane.

Nel piano, dati due punti di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2), sappiamo che la loro distanza è data da

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Analogamente, nello spazio la distanza tra due punti di coordinate (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) è data da

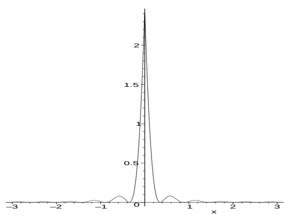
$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

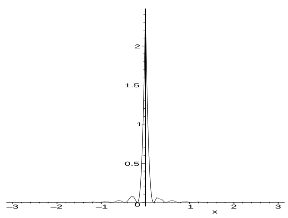
Se poi avessimo punti in “spazi di dimensione superiore” con quattro, cinque, nove, quattrocento coordinate...la generalizzazione della formula per la distanza sarebbe abbastanza ovvia!

Allora, date le nostre due funzioni periodiche $f_n(t)$ e $f(t)$, vien voglia di dire che la loro “distanza euclidea” si ottiene prendendo la radice quadrata delle “somme” al variare di t dei valori $(f_n(t) - f(t))^2$: l’idea ingenua è di considerare i valori di una funzione nei punti dell’intervallo $[-\pi, \pi]$ come le “infinite coordinate” di un punto appartenente ad uno spazio di dimensione infinita!

Il problema è che non possiamo veramente fare le “somme” di $(f_n(t) - f(t))^2$: dovremmo sommare su tutti i t in un periodo, per esempio su tutti i $t \in [-\pi, \pi]$ (tanto le funzioni sono periodiche e fuori da questo intervallo tutto si ripete)...ma intuitivamente una tale somma sarebbe infinita.

Facciamo allora una cosa “ispirata” dalla distanza nel piano e nello spazio, ma leggermente diversa: disegnamo il grafico della funzione $(f_n(t) - f(t))^2$ nell’intervallo $[-\pi, \pi]$ corrispondente ad un periodo: ecco quel che si ottiene per $n = 5$ e $n = 10$





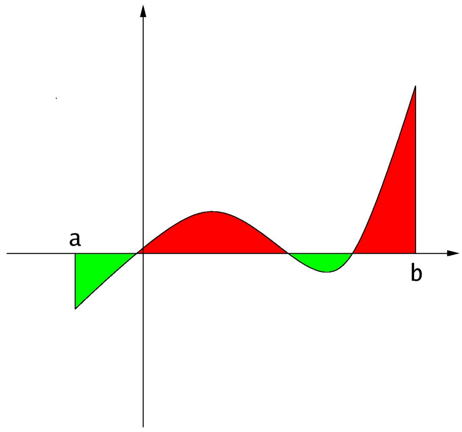
Si vede che le funzioni $(f_n(t) - f(t))^2$ sono “alte” vicino all’origine...ma questo in qualche senso lo avevamo già notato! In compenso, questa zona “cattiva” diventa sempre più stretta, a indicare che l’approssimazione sta migliorando. Un’idea astuta è allora quella di sostituire la somma che compariva nella distanza euclidea con l’*area* $A_{(f_n-f)^2}$ del sottografico della funzione $(f_n(t) - f(t))^2$ compreso tra $t = -\pi$ e $t = \pi$, cioè l’area della regione del piano $S = \{(t, y) : -\pi \leq t \leq \pi, 0 \leq y \leq (f_n(t) - f(t))^2\}$.

Definiamo cioè

$$d(f_n, f) = \sqrt{A_{(f_n-f)^2}} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f_n(t) - f(t))^2}.$$

Nell’ultima formula, la scrittura $\int_{-\pi}^{\pi}(f_n(t) - f(t))^2$ denota l’*integrale* della funzione $(f_n(t) - f(t))^2$ tra $-\pi$ e π: questo (per funzioni maggiori o uguali a 0) è semplicemente gergo matematico per indicare l’area del sottografico.

L'integrale si può definire (e ci servirà nel prossimo incontro...) anche per funzioni il cui grafico non stia tutto *sopra* l'asse delle t: in tal caso, conveniamo che le aree dei "pezzi di sottografico" che stanno sotto l'asse delle t vengono contabilizzati col segno meno: per esempio nella figura che segue



si ha

$$\int_a^b f(x) = \text{Area}(\textit{Regione rossa}) - \text{Area}(\textit{Regione verde}).$$

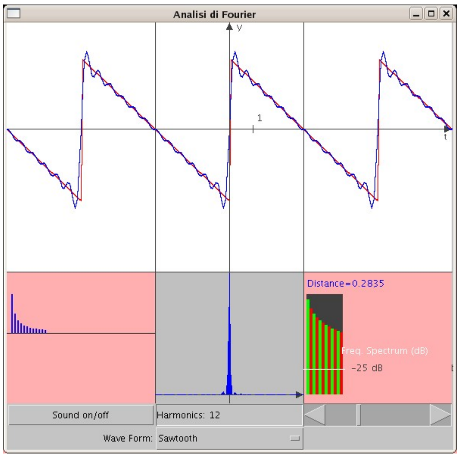
Altro semplice esempio: si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin t = 0,$$

perché l'area della "gobba" fatta dalla funzione seno al di sopra dell'asse t tra 0 e π si cancella con l'area (negativa) della gobba fatta dalla stessa funzione tra $-\pi$ e 0.... E' importante ribadire, comunque, che nel caso della definizione della distanza la funzione $(f_n(t) - f(t))^2$ non è mai negativa (è un quadrato!), quindi in quel caso l'integrale è proprio l'area contata col segno più.

Esistono dei modi relativamente semplici per *calcolare* gli integrali di funzioni elementari: li imparerete in seguito, per ora ci basta conoscere il significato geometrico di questo misterioso oggetto.

Quella che abbiamo dato sembra una ragionevole nozione di distanza tra le due funzioni: in effetti, l'area sarà tanto più piccola, quanto più le due funzioni avranno grafici "simili". Facendo degli esperimenti con un secondo programmino java che ho preparato per questi incontri, ci si rende conto che la distanza tra f_n e f decresce effettivamente al crescere di n, e si avvicina sempre di più allo zero: abbiamo trovato il modo giusto di dire che le funzioni f_n "tendono" alla funzione f!



Con l'applet java citata sopra, possiamo anche sentirlo[2]!

La coppia di applet java che abbiamo usato ci permette di vedere e sentire un sacco di altre cose: per esempio, che cambiando la forma d'onda cambia il timbro della nota emessa.

Poi, che cambiando le *fasi* ϕ_n delle armoniche, il nostro orecchio non si accorge della differenza: supponiamo di sostituire le funzioni f_n scritte sopra con funzioni "simili" del tipo

$$g_n(t) = \cos(t+\phi_1)+1/2\cos(2t+\phi_2)+1/3\sin(3t+\phi_3)+1/4\sin(4t+\phi_4)+\ldots+1/n\cos(nt+\phi_n),$$

in cui abbiamo spostato le fasi di ciascuna armonica di una quantità arbitraria ϕ_n: otteniamo una forma d'onda completamente diversa dal dente di sega, che però "suona esattamente uguale"!

L'applet consente di fare un'altra cosa che dovrebbe darci molto da pensare: è possibile tracciare con il mouse una forma d'onda arbitraria, e vedere come il programma riesca ad approssimarla sempre *molto bene* con una somma di armoniche...

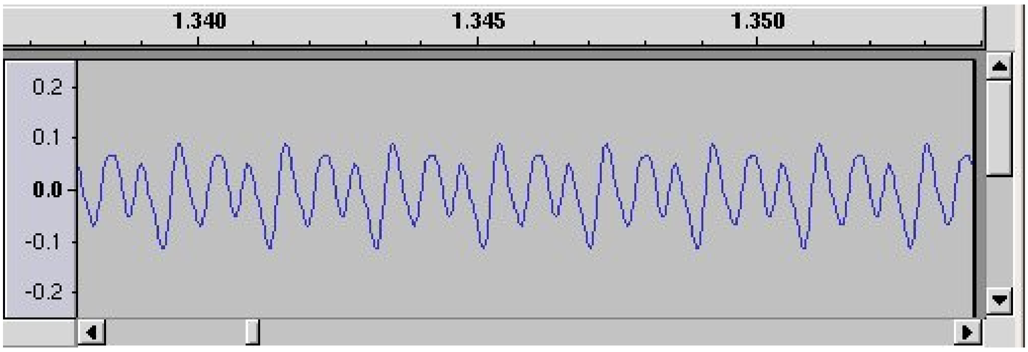
Ma come farà mai l'applet a trovare i coefficienti giusti? Se proviamo a farlo "per tentativi" con il primo dei nostri programmini, muovendo a destra e a sinistra le slitte che controllano i coefficienti, dovremmo convincerci facilmente che è difficilissimo! La teoria matematica che permette la ricerca dei "coefficienti giusti" costituirà infatti l'argomento principale del nostro prossimo incontro...

Per concludere l'incontro, possiamo provare a fare un esperimento piuttosto divertente: apriamo il file musicale contenente la nota suonata da oboe, violino

[2] In effetti, per rendere la distanza tra f_n e f piccola quanto vogliamo, abbiamo bisogno di prendere n sempre più grande. Ma questo non è vero per quanto riguarda il nostro orecchio: una sua caratteristica è quella di essere "incapace" di sentire frequenze oltre i 20000Hz (ultrasuoni). Quindi non ci accorgeremo mai di armoniche con n troppo grande!

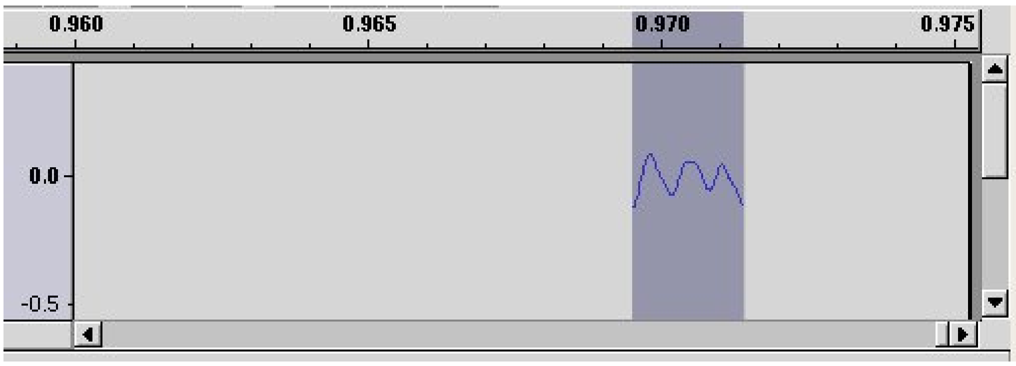
e tromba con un editor audio come l'ottimo programma gratuito Audacity, ed osserviamo la forma del segnale emesso dagli strumenti...

La forma d'onda emessa dall'oboe è quasi perfettamente periodica:

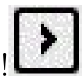


...ma non lo è esattamente, per cui non è possibile pensare di approssimarla con suoni armonici.

Proviamo a selezionare con Audacity *un solo periodo* del nostro segnale, cancellando tutto il resto del file:



Dopodiché, possiamo ottenere un segnale *perfettamente periodico* prendendo il nostro periodo campione e ripetendolo un migliaio di volte (Audacity ha un apposito filtro proprio a questo scopo...).

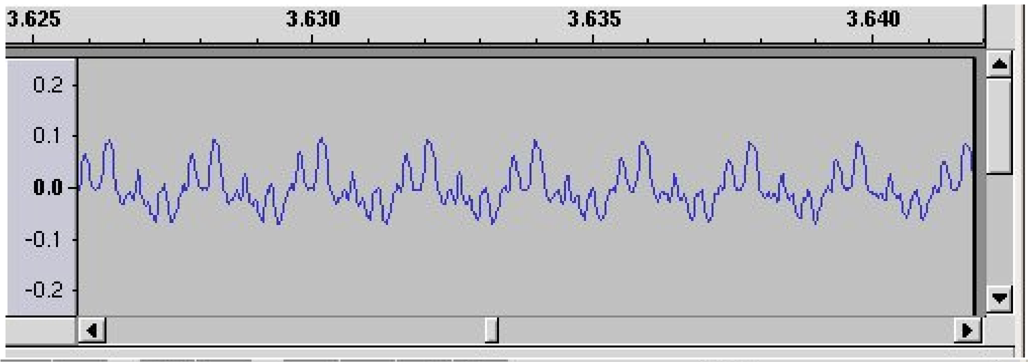
Ecco il file musicale ottenuto in questo modo: il suono dell'oboe è diventato un po' meccanico, ma è ancora perfettamente riconoscibile! 

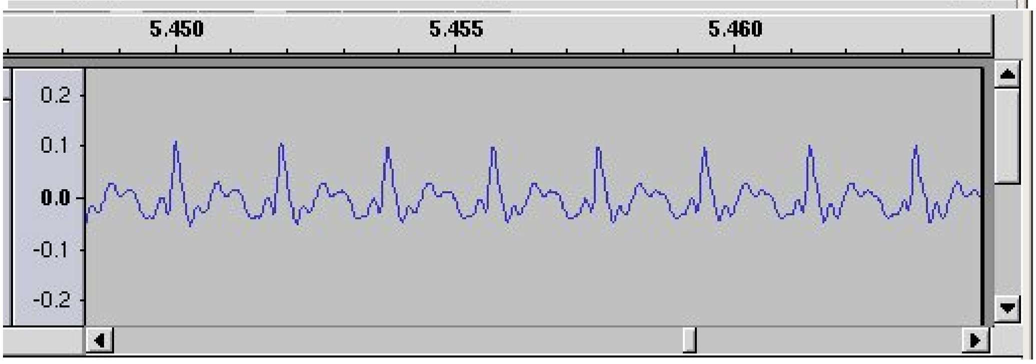
Questo segnale, come vedremo la prossima volta, è perfettamente riproducibile come somma di armoniche sinusoidali.

Le cose non vanno così lisce se tentiamo di ripetere il giochino per il violino e per la tromba: aprendo il file con Audacity, vediamo subito che il segnale emesso da questi strumenti presenta delle notevoli fluttuazioni, sia dell'ampiezza che della forma d'onda.

Questo è perfettamente avvertibile ad orecchio nel file musicale originale: in violino e tromba si sente subito un effetto di *vibrato* assente per l'oboe. Inoltre, con un po' di attenzione si sente anche una presenza "fluttuante" di frequenze che compaiono e scompaiono alternativamente.

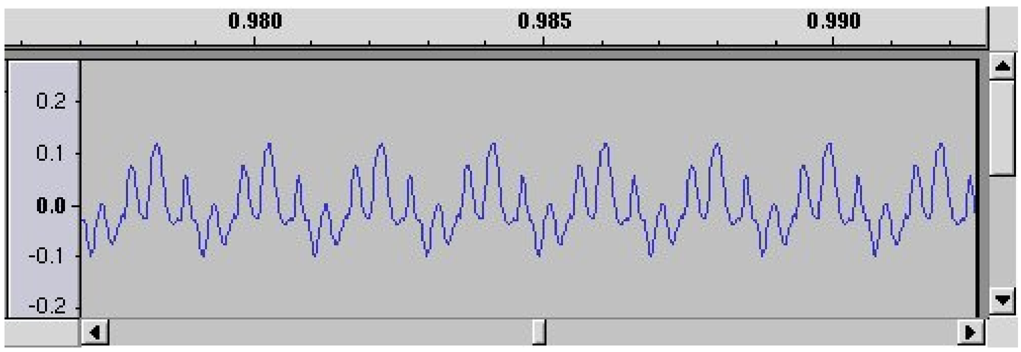
Con un po' di fatica, si riesce comunque a trovare una porzione "quasi periodica" del segnale prodotto dal violino e dalla tromba: eccole rappresentate nella finestra di Audacity.

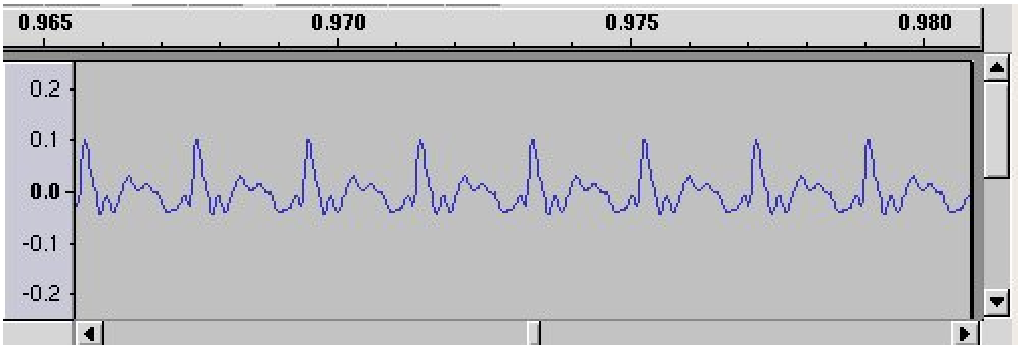




Ripetiamo quanto abbiamo fatto per l'oboe: selezioniamo un unico periodo del segnale relativo al violino o alla tromba, e creiamo un segnale perfettamente periodico ripetendo il nostro campione per 1000 volte.

Ecco le forme d'onda ottenute:





Proviamo ora a sentire questi due strumenti “periodicizzati”:

prima il violino

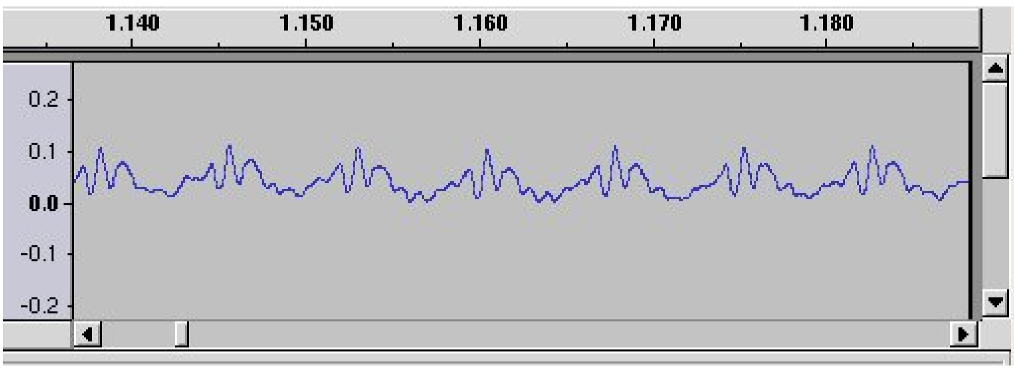
poi la tromba

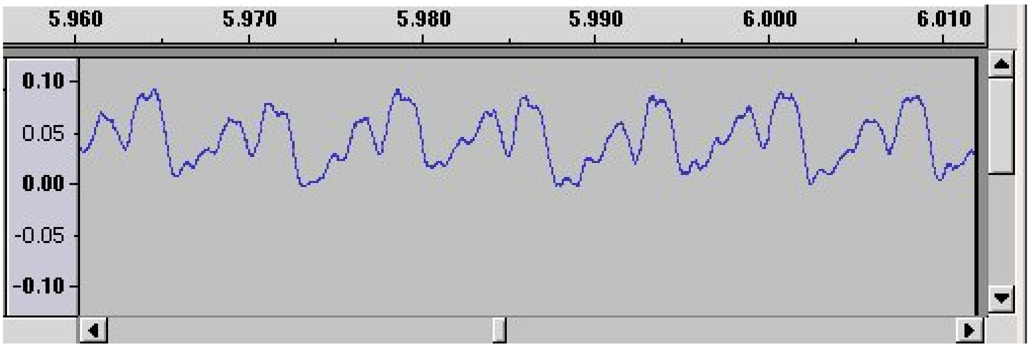
Deludente, vero? Occorre fare un certo sforzo di fantasia per riconoscere una parentela con lo strumento originale! Evidentemente, per identificare un suono come prodotto da un violino o da una tromba non basta riprodurne la forma d’onda, ma sono assolutamente essenziali altri caratteristiche come l’inviluppo (l’effetto di vibrato...) e la fluttuazione temporale della forma d’onda stessa.

Al contrario, questo esperimento fornisce risultati piuttosto gratificanti usando la voce umana come “strumento musicale”: ho provato a pronunciare i vocalizzi “AAAAAAA” e “OOOOO” al microfono del computer e ad aprire il file risultante con Audacity. Ancora una volta, ho ripetuto il giochino di “rendere periodico” il segnale (selezionando un solo periodo, poi ripetuto qualche centinaio di volte).

Il campione sonoro che segue contiene i miei vocalizzi “originali”, seguiti dalla versione periodicizzata degli stessi: le vocali sono ancora ben riconoscibili

Ecco le forme d’onda della “AAA” e della “OOO”:





Vedremo la prossima volta come anche questi suoni siano riproducibili come somme di armoniche sinusoidali...e come questo fatto abbia a che fare anche con gli algoritmi di compressione dei file musicali (mp3, wma, ra...).