Da Sisto ai compagni di avventura nel laboratorio MatFisMus:

Qualche riflessione sull'approssimazione di funzioni periodiche con la sintesi di Fourier: come misurare quanto è buona l'approssimazione?

Ciao a tutti,
voglio darvi qualche spunto di riflessione su uno dei punti che sono sorti nella riunione di progettazione di martedi' scorso (22/10): si tratta di un punto al quale, come matematico, sono molto "affezionato", per cui mi piacerebbe molto che si potesse discuterne nel forum prima del prossimo incontro.

La questione è la seguente: come arrivare dalla somma di funzioni armoniche (seni e coseni di frequenza multipla) all'idea di sintesi e di analisi di Fourier? E come possiamo "istigare" gli studenti a porsi domande *matematicamente significative* sulla questione? Ho provato a fare l'esercizio di delineare un *percorso possibile*: evidentemente, dovremo essere pronti a deviare per seguire l'andamento della discussione in aula!

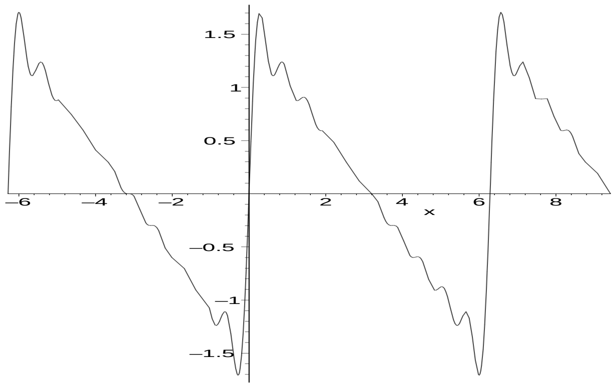
Mi pare che siamo più o meno d'accordo che all'idea di sovrapporre oscillazioni sinusoidali di frequenze multiple una dell'altra (armoniche), si può arrivare per esempio dai modi di una corda vibrante, e/o giocando con il bellissimo applet java di Richard Falstad (http://www.falstad.com) che ci ha fatto vedere Stefano la volta scorsa. Questo, magari, accompagnato da qualche semplice somma di funzioni trigonometriche fatta a mano e/o con Derive/Maple/Qualcosaltro... anche se l'applet ha l'incomparabile vantaggio che è possibile *sentire* il suono risultante dalla somma!

In ogni caso, il messaggio che dovrebbe passare è che facendo somme di funzioni sinusoidali di frequenza multipla di una fondamentale, si ottengono funzioni sempre periodiche, ma dalla "forma" anche MOLTO complicata (e dal suono anche molto "ricco" dal punto di vista timbrico!).

Tra i vari esperimenti che si possono fare con l'applet java, ce n'è uno talmente semplice che potrebbe persino capitare di farlo per sbaglio: cosa succede se sommo funzioni seno di frequenza multipla, con ampiezza che decresce come 1/n? In altre parole, che "bestia" è una funzione del tipo

$$f_n(t) = A(\sin(t) + 1/2\sin(2t) + 1/3\sin(3t) + 1/4\sin(4t) + \ldots + 1/n\sin(nt)?$$

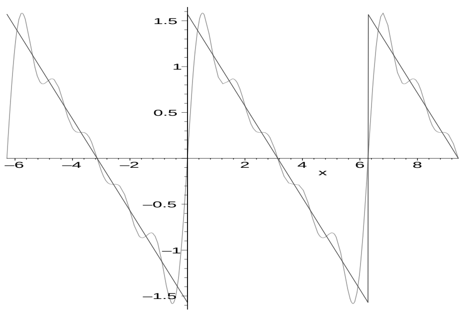
(Ho scelto l'unità di tempo in modo che la frequenza sia 1... scusate, ma in fondo sono un matematico!) Se proviamo a riprodurre questa situazione con l'applet java, otteniamo una forma d'onda che assomiglia sempre di più a un dente di sega: la figura che segue l'ho ottenuta con Maple per $n = 10$.

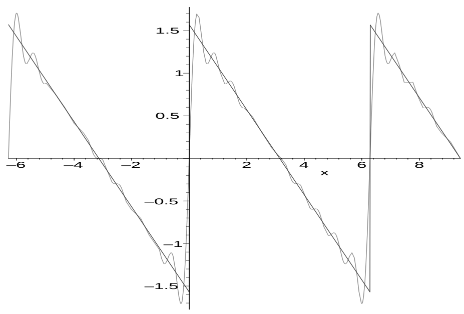


Insomma, non è troppo difficile congetturare che la nostra somma di seni ha un grafico che assomiglia sempre di più a una funzione $f(t)$ che

- è periodica di periodo 2π e dispari,
- in $t = 0$ salta tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ (si osservino i numerini sugli assi...), mentre tra 0 e π abbiamo $f(t) = \frac{\pi}{2} - t/2$[1].
- non è chiarissimo quanto valga f per $t = 0$...Però, visto che le f_n valgono tutte 0 nell'origine, possiamo attribuire lo stesso valore anche a f.

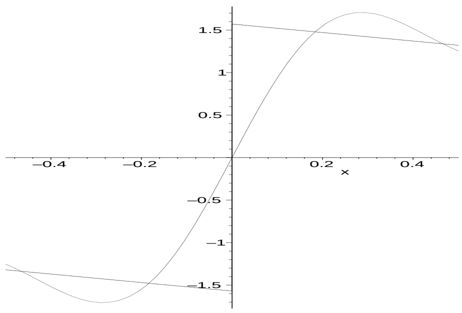
Riassumendo, l'impressione è che le somme di seni $f_n(x)$, al crecere di n, si "avvicinino sempre di più" alla funzione a dente di sega: impressione che diventa ancora più forte se sovrapponiamo i grafici. Le due figure seguenti mostrano cosa succede se sovrapponiamo i grafici di f_5 e f_{10} a quello del dente di sega $f(t)$:





In che senso la funzione $f_n(t)$ è sempre più vicina alla funzione $f(t)$? Verrebbe da dire che il grafico di f_n è sempre più vicino al grafico di f... Questo è *quasi* vero, tranne che vicino ai punti di discontinuità: ecco un ingrandimento dell'ultima figura vicino a $t = 0$ (attenzione: il rapporto di scala tra gli assi è cambiato!)

[1] Non è quindi difficile scrivere l'equazione del "dente di sega" a pezzi. Oppure, usando gli "effetti speciali", si ha $f(t) = \arctan(1/tan(t/2))$



Visto che il "tratto verticale" *non appartiene* al grafico di f (e su questo potrebbe prodursi spontaneamente un istruttivo battibecco con gli studenti!), vediamo che i due grafici non sono affatto vicini, e non lo sarebbero (non potrebbero esserlo) neanche se prendessi un n molto più grande[2].

Occorre quindi scoprire una "distanza tra funzioni" che ci dica che f_n e f sono "vicine", e che lo sono sempre di più man mano che n cresce: in fondo, non possiamo mica smettere di credere ai nostri occhi (e orecchie)!

Per definire la distanza tra f_n e f ci possiamo ispirare alla distanza euclidea tra punti del piano e dello spazio, individuati attraverso le loro coordinate cartesiane.

Nel piano, dati due punti di coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2), sappiamo che la loro distanza è data da

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Analogamente, nello spazio la distanza tra due punti di coordinate (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) è data da

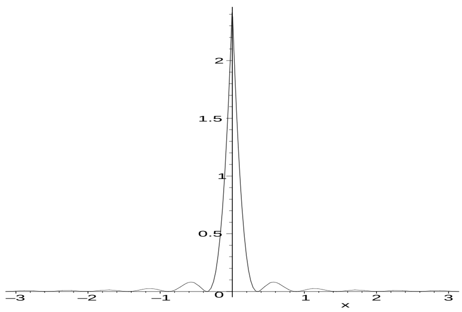
$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

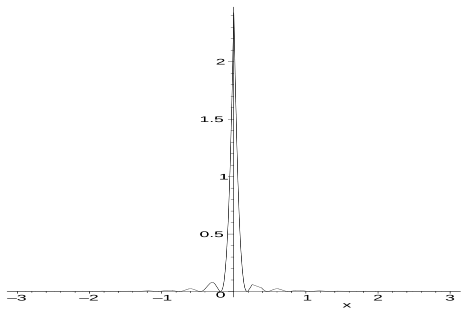
Allora, date le nostre due funzioni periodiche $f_n(t)$ e $f(t)$, vien voglia di dire che la loro "distanza euclidea" si ottiene prendendo la radice quadrata delle "somme" al variare di t dei valori $(f(t) - g(t))^2$. Il problema è che non possiamo veramente fare le "somme" di $(f(t)-g(t))^2$: dovremmo sommare su tutti i t in un periodo, per esempio su tutti i $t \in [-\pi, \pi]$ (tanto le funzioni sono periodiche e fuori da questo intervallo tutto si ripete)...ma intuitivamente una tale somma sarebbe infinita[3].

[2] Tradotto in matematichese: le funzioni f_n *non* convergono uniformemente a f.

[3] In effetti, non è difficile dare una nozione di somma per una famiglia qualunque di numeri non negativi (basta fare il sup delle somme di sottofamiglie finite). D'altra parte, se questo sup è finito non è difficile vedere che l'insieme di numeri contiene al più una quantità numerabile di elementi non nulli... Certamente di questo non si può parlare con gli studenti, ma non ho resistito a segnalarvi il fatto!

Facciamo allora una cosa diversa: disegnamo il grafico della funzione $(f_n(t) - f(t))^2$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ corrispondente ad un periodo: ecco quel che si ottiene per $n = 5$ e $n = 10$





Si vede che le funzioni $(f_n(t)-f(t))^2$ sono "alte" vicino all'origine...ma questo in qualche senso lo avevamo già notato! In compenso, questa zona "cattiva" diventa sempre più stretta, a indicare che l'approssimazione sta migliorando. Un'idea astuta è allora quella di prendere come misura della differenza tra f_n e f l'*area* $A_{(f_n-f)^2}$ del sottografico della funzione compreso tra $t = -\pi$ e $t = \pi$. Definiamo cioè

$$d(f_n, f) = \sqrt{A_{(f_n-f)^2}} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f_n(t) - f(t))^2}$$

(ci siamo così inventati anche un'OTTIMA scusa per introdurre il simbolo di integrale!)

Questa sembra una ragionevole nozione di distanza tra le due funzioni: in effetti, l'area sarà tanto più piccola, quanto più le due funzioni hanno grafici "simili". Facendo degli esperimenti con Maple, ci si rende conto che la distanza tra f_n e f decresce effettivamente al crescere di n: abbiamo trovato la nozione giusta!

È evidente che abbiamo barato un po': se non ci fossimo così platealmente "ispirati" alla distanza euclidea, avremmo potuto trovare altre metriche integrali che a questo stadio sarebbero andate altrettanto bene, per esempio la metrica L^1 data da

$$d_1(f_n, f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t) - f(t)| \, dt.$$

D'altra parte, la distanza L^2 che abbiamo definito è quella che permetterà di fare un sacco di discorsi veramente elementari sulle serie di Fourier: in ultima analisi, questo dipende dal fatto che si tratta di una metrica hilbertiana...ma non c'è nessun bisogno di "confessarlo" agli studenti che partecipano al laboratorio!

È evidente, come avevo anticipato all'inizio, che la strada che ho delineato può portare in tante direzioni collaterali, ricchissime di situazioni e di attività "di laboratorio":

- un più generale concetto di distanza...anche in dimensione finita (esempio, la metrica del tassista, equivalente finito-dimensionale della metrica L^1: ci fornisce un buon motivo euristico per dire che la metrica L^2 è meglio della metrica L^1);

- il concetto di serie e di convergenza della stessa (se scelgo male i coefficienti di Fourier - per esempio non li faccio andare a zero - le somme che ottengo non hanno l'aria di avvicinarsi a qualcosa al crescere di n, ma piuttosto esplodono all'infinito o cambiano in modo "imprevedibile"...Per "indagare", posso passare a vedere degli esempi di più semplici serie numeriche!);

- l'analisi di Fourier: l'applet di Richard Falstad sembra indicare che con somme di seni e coseni posso approssimare "qualsiasi" funzione periodica: è vero? E in tal caso come posso determinare i coefficienti in modo ottimale? (relazioni di ortogonalità tra funzioni trigonometriche; come ritrovare i coefficienti di una data somma finita di seni e coseni, ciascuono dei quali di ampiezza incognita; approssimazione ottimale di una funzione periodica qualunque con seni e coseni;...)

Siete tutti invitati a dire la vostra... e naturalmente non mi esimerò dal dire la mia!