UNIVERSITA' DI TRENTO

Progetto:

"ONDE E MUSICA"

Prof.

Beniamino Danese

A cura di: Federico Marin
Liceo Scientifico G. Dal Piaz
IV A

Feltre, 22 Febbraio, 2007

Il nostro cammino all' interno della fisica dei suoni ci porta dunque a studiare come si formano i suoni. Abbiamo scomposto i suoni periodici in somme di seni e coseni, siamo riusciti a caratterizzarli in tutti i loro aspetti, ma come riescono gli strumenti musicali a generarli?

In particolare quest' attività ha lo scopo di analizzare come lo strumento musicale riesca a produrre tutte quelle sinusoidi che associamo alle note. Per prima cosa cerchiamo di definire cosa sia uno strumento musicale: esso è un oggetto che mette in vibrazione le particelle d' aria, in modo che la perturbazione così creata possa propagarsi all' interno del mezzo(aria) fino a che questa differenza di pressione giunga al nostro timpano. Questa virtuosa membrana del nostro orecchio riesce attraverso la fisiologia uditiva a trasformare la vibrazione meccanica in stimoli neurologici, che decodificati dal cervello, ci permettono la percezione del suono.

Gli strumenti musicali possono essere caratterizzati in alcuni gruppi:

- Strumenti a corda
- Strumenti a percussione
- Strumenti ad aria

La classificazione di questi avviene in base a quale dispositivo dello strumento vibri: uno strumento a fiato fa vibrare l' aria all' interno di una canna, diversamente uno strumento a corda mette in vibrazione le sue corde, quelli a percussione infine producono i suoni mediante la vibrazione di una membrana.

Prima però di discutere sugli strumenti è importante spendere alcune parole su cosa siano la note musicali.

Le note musicali sono dei suoni periodici, il che significa che sono dotati di una determinata frequenza. Il numero di oscillazioni per secondo (frequenza) è un dato fondamentale per caratterizzare un suono in quanto ne determina la sua altezza.

scala pitagorica
"canonisti". Rapporti matematici solo con 1, 2, 3, 4

(x es)	rapporti di frequenza	Ossia, **Frequenza** (unità arb.)	Ossia, **Lunghezza** (unità arb.)	(x Es) L = 60 cm
Do tonica	1 : 1	1	1	60
do#				
Re	9 : 8	1,125	0,8888	53,333
re#				
Mi	81 : 64	1,2656	0,7901	47,407
Fa	4 : 3	1,3333	0,75	45
Fa#				
Sol quinta	3 : 2	1,5	0,6666	40
sol#				
La	27 : 16	1,6875	0,5926	35.555
La#				
Si	243 : 128	1,8984	0,5267	31.605
Do ottava	2 : 1	2	0,5	30

Figura 1 La tabella riporta i rapporti di frequenza con i quali i pitagorici dividevano l' unità, utilizzavano solo i multipli di 3 e 4 appunto perché erano numeri considerati sacri.

Per esempio, preso il La 440Hz, una nota la cui frequenza sia 880Hz sarà una nota un' ottava superiore rispetto alla precedente.

Questa interessante osservazione storicamente risale ai tempi dei pitagorici, i quali avevano notato che una corda se dimezzata di lunghezza produceva il suono un’ ottava superiore.

I pitagorici avevano dunque definito una scala musicale che andava da una nota a quella dell’ ottava successiva, le altre note non erano altro che frazioni ricavate all’ interno di questo intervallo. Già duemila anni fa dunque si era stabilita una relazione tra la lunghezza della corda vibrante e la frequenza che essa produceva.

Questa relazione empiricamente ottenuta trova delle giustificazioni matematiche molto interessanti che riguardano le onde stazionarie. Il caso della corda vibrante per esempio riproduce il modello di una corda fissata a due estremi.

Il modello fisico suggerisce che la corda, quando pizzicata, sia percorsa da due onde viaggianti che interferendo fra loro formano un’ onda stazionaria. Trascurando la trattazione matematica di queste particolari onde, si può dimostrare che all’ interno della corda non si possono generare tutti i tipi di onda ma solo quelle la cui lunghezza d’ onda rispetta la relazione:

$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

Ma vediamo se è vero ciò che i pitagorici avevano evidenziato empiricamente:

$$\begin{cases} v = \lambda f \\ \lambda = \dfrac{2l}{n} \end{cases}$$

$Dove\ v\ rappresenta\ la\ velocit$à $di\ propagazione\ del\ suono\quad (340\ m/s\ \ nell^{\wedge\prime}\ aria)\ \ \lambda\ la\ lunghezza\ d^{\wedge\prime}\ onda\ ed\ f\ la\ frequenza$.

Quindi :

$$f = \frac{vn}{2l}$$

La frazione $\frac{nv}{2}$ in questa condizione può essere considerata costante quindi si può notare che se l viene dimezza f viene duplicata. La lunghezza della corda vibrante come quella di una colonna d' aria è direttamente influenzata dalla frequenza che si vuole riprodurre. Volendo studiare e riprodurre degli strumenti musicali è dunque indispensabile tener conto della lunghezza dello strumento vibrante.

Dai tempi dei pitagorici le scale musicali si sono evolute, volendo spendere due parole sulla scale musicale attuali possiamo ricordare la scala ben temperata o "equabile", è quella attualmente utilizzata. Differisce dalla pitagorica per il numero di intervalli nella quale è suddiviso l' intervallo d' ottava.

Questa scala è divisa in 12 semitoni che portano dal Do a quello dell' ottava successiva. Per ottenere gli intervalli che costituiscono questa scala si è deciso di utilizzare la costante moltiplicativa $\sqrt[12]{2}$, questo numero, presa una frequenza di riferimento, ci permette attraverso una moltiplicazione di trovare la frequenza del semitono successivo.

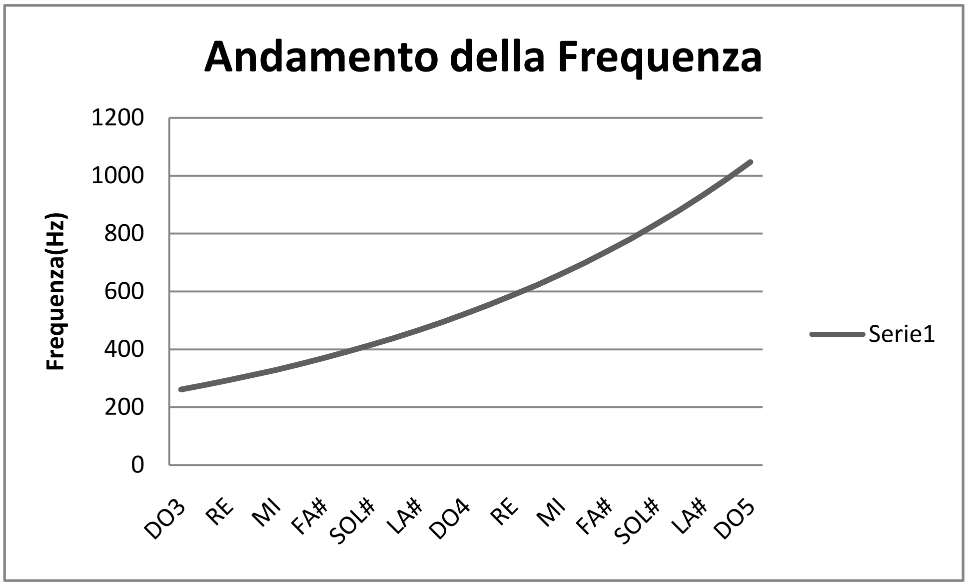
Preso il La 440Hz; la nota superiore di un semitono, cioè il La#, avrà frequenza 440*$\sqrt[12]{2}$ = 466.16 Hz

Di seguito ho ricostruito la scala ben temperata associando ad ogni nota la sua frequenza:

NOTA	FREQUENZA(Hz)
DO_3	261,5435577
DO#	277,1053994
RE	293,5931707
RE#	311,0619643
MI	329,5701512
FA	349,1795752
FA#	369,9557599
SOL	391,9681276
SOL#	415,2902312
LA_3	440
LA#	466,18
SI	493,91771
DO_4	523,3058137

Tabella 1

Proviamo ora a correlare la nota con la rispettiva frequenza mediante un grafico a punti;come si può vedere si ottiene il seguente grafico.



.

Figura 2

Il comportamento di questa linea è molto interessante. L' andamento esponenziale del grafico è giustificato dalla regola di calcolo che la scala ben temperata richiede. La formula di calcolo è la seguente: prendiamo una frequenza unitaria (1- DO). Le frequenze successive come abbiamo detto sopra bisogna calcolarle moltiplicando il valore della frequenza per la costante $\sqrt[12]{2}$:

1$*\sqrt[12]{2}$ *= 1.0595(DO#)*

1.0595$*\sqrt[12]{2} = 1.1225$*(RE)*

1.1225$*\sqrt[12]{2} = 1.1892$*(RE#)*

……….

1.8877$*\sqrt[12]{2} = 2$*(DO*$_1$*)*

Attraverso delle sostituzioni matematiche possiamo scrivere:

1$*\sqrt[12]{2}$ *= 1.0595(DO#)*

1$*\sqrt[12]{2}*\sqrt[12]{2}$*=1.1225(RE)*

La frequenza della note RE non è altro che $\sqrt[12]{2}^{2}$.

La funzione matematica che pone in relazione la frequenza(y) di una nota con il suo semitono (x) è del tipo:

$$y = \sqrt[12]{2}^{x}$$

Inoltre, questa funzione indica la correlazione esponenziale che veniva evidenziata dal grafico precedente.
La funzione mostra come se vogliamo estrapolare la frequenza del dodicesimo semitono partendo da una frequenza unitaria (1) questa equivarrà a $\sqrt[12]{2}^{12}$ cioè 2; il che equivale proprio alla frequenza della nota un' ottava superiore rispetto a quella di riferimento, con appunto frequenza doppia.

Se volessimo costruire la funzione che, invece di essere tarata su un frequenza unitaria fosse regolata su di una frequenza di riferimento per esempio il La(440Hz), basterà dilatare verticalmente il grafico di coefficiente 440Hz.

$$f(x) = 440\sqrt[12]{2}^{x}$$

Questa funzione come quella sopra ci fornisce la frequenza di una nota x semitoni più alta rispetto al La440Hz, mentre se x risulta minore di 0 allora la funzione ci calcolerà la frequenza di una nota x semitoni sotto la nota alla quale è attribuito il valore di riferimento (440Hz).

Detto questo possiamo studiare il funzionamento del **flauto di Pan**.

Questo strumento è formato da un insieme di canne di bambù di lunghezze diverse che se soffiate producono suoni con frequenze diverse, che corrispondo a note diverse.
Il flauto di Pan è originario dell'Europa dell'Est e dei paesi dell'America Meridionale, dove è molto utilizzato, specialmente in Cile, Equador, Perù, Bolivia.
E' uno strumento antichissimo conosciuto già dagli antichi Greci che ne attribuivano l'invenzione al dio Pan, la divinità dei boschi. Infatti il nome dello strumento proviene dalla leggenda secondo cui la ninfa Siringa si trasformò in un cespuglio di canne nel tentativo di sfuggire al dio Pan che, per consolarsi, tagliò alcune canne e cominciò a suonarle.

Gli strumenti per costruire questo particolare strumento a fiato sono molto semplici: dei tubi di plastica in PVC per le canne, dei palloncini che, applicati sul lato inferiore del tubo, fungono da membrane vibranti, e vari strumenti di lavoro(seghetto e calcolatrice).
Parlo di calcolatrice appunto perché il primo problema da affrontare è : quanto lunghe devono essere le canne del flauto?
Sfruttiamo allora quanto detto sulle onde stazionarie e la loro frequenza.
Il modello fisico che meglio spiega il flauto di Pan è quello che descrive le onde che si formano per interferenza tra due onde viaggianti in versi opposti nel caso in cui un solo estremo sia libero. (Diversamente da quando succedeva per la corda di chitarra che è invece una corda fissata a due estremi.)

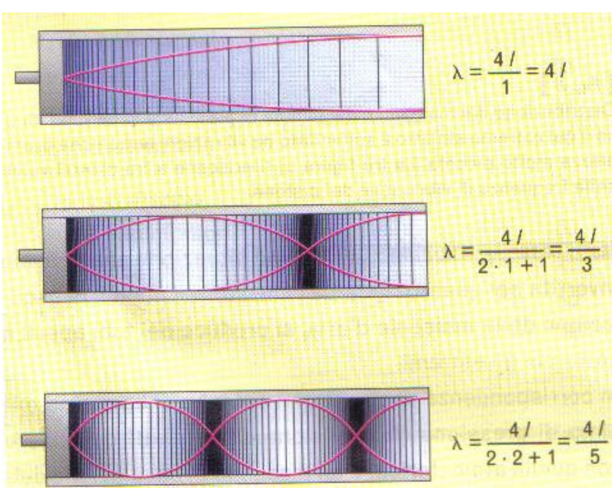


Figura 3

Queste rappresentazioni mostrano le onde stazionarie che possono crearsi all' interno di un tubo chiuso ad un estremo.

In questo caso la trattazione matematica ci mostra come sia valida la seguente relazione tra lunghezza d' onda λ e la lunghezza del tubo l.

$$\lambda = \frac{4l}{(2n+1)}$$

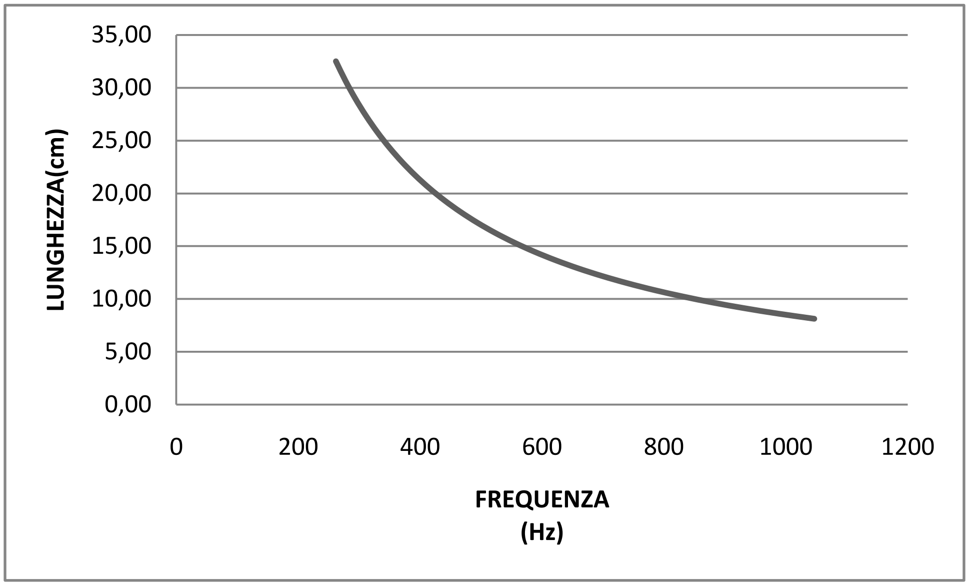
Anche in questo caso la correlazione frequenza-lunghezza del tubo è molto stretta nel senso che una determinata frequenza si può generare soltanto con specifiche lunghezze del tubo.
La lunghezza delle nostre canne di conseguenza può essere facilmente ricavata attraverso la formula sopra indicata, visto che le frequenze delle note le possiamo ritrovare nella tabella sopra calcolata.
Otteniamo così i seguenti valori:

NOTA	FREQUENZA(Hz)	LUNGHEZZA(cm)
DO_3	261,5435577	32,50
DO#	277,1053994	30,67
RE	293,5931707	28,95
RE#	311,0619643	27,33
MI	329,5701512	25,79
FA	349,1795752	24,34
FA#	369,9557599	22,98
SOL	391,9681276	21,69
SOL#	415,2902312	20,47
LA_3	440	19,32
LA#	466,18	18,23
SI	493,91771	17,21

DO$_4$	523,3058137		16,24

Tabella 2

Ho inoltre cercato di rappresentare sul piano cartesiano la correlazione tra frequenza-lunghezza, ed ho così ottenuto il seguente grafico:



.

Figura 4

Risulta evidente l' inversa proporzionalità tra le due grandezze: come notarono i pitagorici al dimezzare della lunghezza della corda, corrispondeva un raddoppio della frequenza della nota che veniva prodotta.

Ora facendo affidamento alla tabella 2 possiamo tagliare le canalette di PVC con dimensioni diverse in modo da ottenere note diverse. Per motivi di tempo abbiamo ottenuto solo 7 toni fondamentali: DO$_3$, RE, MI, FA, SOL, LA$_3$, SI, DO$_4$.

Infine abbiamo teso le membrane dei palloncini sul fondo dei tubi.

Queste membrane servono appunto per

Figura 5

chiudere un lato del tubo e così riprodurre il modello fisico a cui avevamo fatto riferimento.
Quanto al funzionamento del flauto è molto semplice: quando soffiamo nel tubo, con una inclinazione, una certa parte dell' aria entra nel tubo, mentre una seconda parte dell' aria tenderà ad uscire. All' interno del tubo si formerà dunque un' onda viaggiante verso il fondo, e quando questa incontrerà la membrana posta sul fondo tenderà a rimbalzare ed invertire il proprio senso di marcia. Quest' onda tenderà quindi ad uscire dal tubo, ma nel suo percorso incontrerà un' altra onda che contemporaneamente starà percorrendo il tubo verso il fondo. Queste due onde interferiranno tra loro, e come la fisica ci suggerisce, si formerà un' onda stazionaria e le nostre orecchie potranno ascoltare la gradevole melodia di questo strumento.