UNIVERSITA' DI TRENTO

Progetto:

"ONDE E MUSICA"

Prof. Sisto Baldo

A cura di: Federico Marin
Liceo Scientifico G. Dal Piaz
IV A

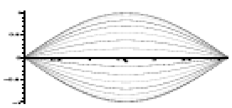
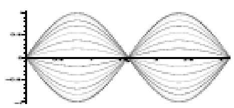
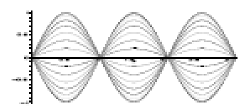
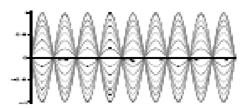
Trento, 15 Febbraio, 2007

In questo progetto vogliamo occuparci di descrivere i fenomeni acustici che ascoltiamo tutti i giorni da un punto di vista fisico e matematico. Potremmo scoprire aspetti molto interessanti, che nulla tolgono alla bellezza compositiva di una fuga di Bach, ma semplicemente analizzare questo fenomeno da un punto di vista diverso, aggiungendo così stupore e meraviglia alla realtà.

In particolare quest' attività ha lo scopo di analizzare come le onde periodiche che ascoltiamo, tipo il suono di un pianoforte o di un violino, possano essere scomposte in somme di seni e coseni a frequenze multiple di una fondamentale.

Poter scomporre le onde delle note musicali in somme di seni e coseni è molto importante per caratterizzare i suoni, purché periodici , che udiamo normalmente.

Il diapason scrivente del prof. Gratton se strisciato sulla carta carbone, disegnava una sinusoide, che andava smorzandosi nel tempo. Descrivere quell' onda per i matematici risulta abbastanza semplice, ma non tutti i suoni che ascoltiamo hanno una legge oraria così semplice. Per analizzare i suoni e quindi le loro forme d' onda molto complesse sarà fondamentale poterli ridurre a somme di seni e coseni alla frequenza multipla della fondamentale.

Sempre la corda vibrante del Prof. Gratton quando veniva fatta vibrare dall' altoparlante non reagiva a qualsiasi frequenza, ma solo a quelle multiple di una certa frequenza base.

Così anche nelle corde di una chitarra, a meno che non pizzichiamo esattamente la metà della corda stessa, il suono che giungerà al nostro orecchio sarà quindi la somma di una vibrazione alla frequenza fondamentale, più un'altra (probabilmente con minore ampiezza) alla frequenza doppia, una alla frequenza tripla e così via. Questo succede sia quando suoniamo un pianoforte sia quando mettiamo in vibrazione la colonna d' aria presente nella canna di organo o di un flauto.

Il suono del diapason ha una legge oraria perfettamente sinusoidale, anche la legge oraria del suono emesso da un diapason accordato a 440 Hz sarà del tipo:

$$f(t) = A\cos(t+\varphi)$$

Il termine φ indica l' angolo di fase: non è infatti detto che l' onda "parta" a t=0.

Le leggi orarie delle onde che hanno frequenze multiple di quella fondamentale avranno quindi la seguente legge oraria:

$$f_n(t) = a_n\cos(nt+\varphi_n)$$

con n= ,1,2,3,4…∈ N

Notiamo subito che, grazie alle formule di addizione del coseno, la legge oraria
può essere riscritta:

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

con n= ,1,2,3,4…∈ N

Sommando seni e coseni a frequenza multipla della fondamentale possiamo così studiare tutte le forme d' onda dei suoni periodici presenti in natura. Notare che a_n e b_n sono dei coefficienti costanti per ogni armonica(frequenza multipla della fondamentale) e sono caratteristici di ogni strumento musicale.

Ci siamo occupati di studiare quest' ultima $f_n(t)$ ponendoci alcune domande:

- quali forme d' onda possiamo visualizzare con questa equazione?
- proprio tutte le forme d' onda possiamo tradurre sotto quella forma?

Il Prof. Baldo ha preparato appositamente un programmino java che sperimentalmente può rispondere a queste domande.

Disegnando con il mouse una qualsiasi forma d' onda periodica di 2π, l' applicazione cerca di tradurre la forma d' onda disegnata g(t) in somme di seni e coseni a frequenze multiple, cerca quindi approssimare la $f_n(t)$ a g(t). Sempre sperimentalmente si nota che più si aumentano le armoniche (n), più $f_n(t)$ diventa simile a g(t). In fine l' applicazione ci fornisce i valori di a_n e b_n che il programma ha utilizzato per ogni armonica in modo tale da avvicinarsi maggiormente a g(t).

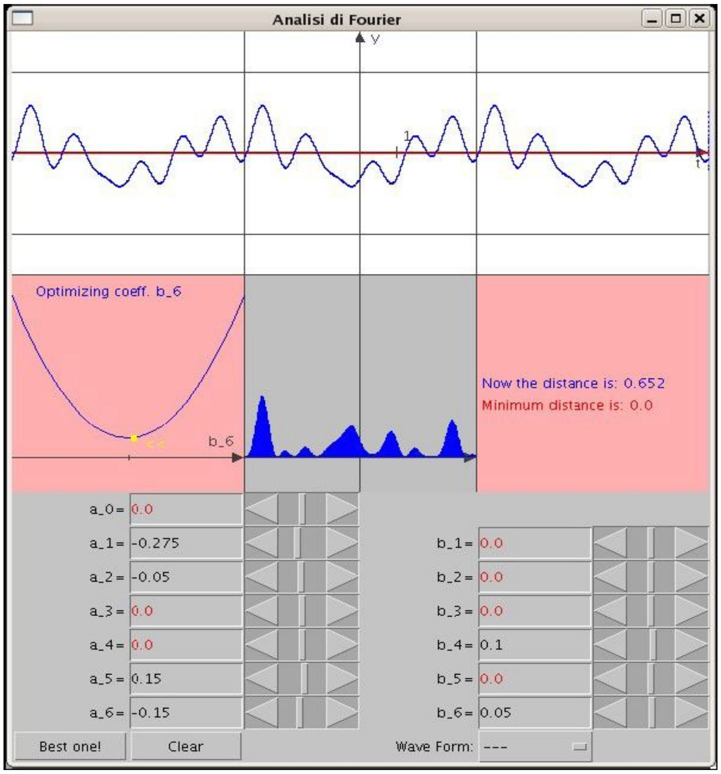


FIGURA 1. L' INTERFACCIA DEL PROGRAMMA. I PARAMETRI A_0, E $A1$,$B1$ E $A2$,$B2$ RAPPRESENTANO I COEFFICIENTI USATI DAL PROGRAMMA PER OGNI ARMONICA;. IL PARAMETRO A_0 TRASLA SOLAMENTE IL GRAFICO IN DIREZIONE VERTICALE.

$$f_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

Abbiamo così scomposto l' onda in un polinomio trigonometrico, studiando il suono come somma di sinusoidi a frequenze multiple della fondamentale ognuna con una particolare ampiezza che dipende dai parametri a_n e b_n. L' operazione che stiamo compiendo è quella di visualizzare lo spettro del suono, quest' ultimo infatti individua quali frequenze e in quali quantità sono presenti in un suono.

La domanda dovrebbe essere ovvia: ma come fa il computer a trovare questi parametri propri di ogni armonica per riprodurre un qualsiasi suono periodico?

Evidentemente non procede a caso, per n armoniche dovrebbe indovinare 2n+1 coefficienti (con solo 6 armoniche avrebbe sei valori di a, sei di b, e ancora quello di $a_{0)}$. Proviamo a scoprirlo!

Possiamo iniziare col visualizzare alcuni tipi di funzioni che si possono rappresentare con questo polinomio trigonometrico. Per esempio:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{11} \left(\frac{1}{n} \sin nt \right)$$

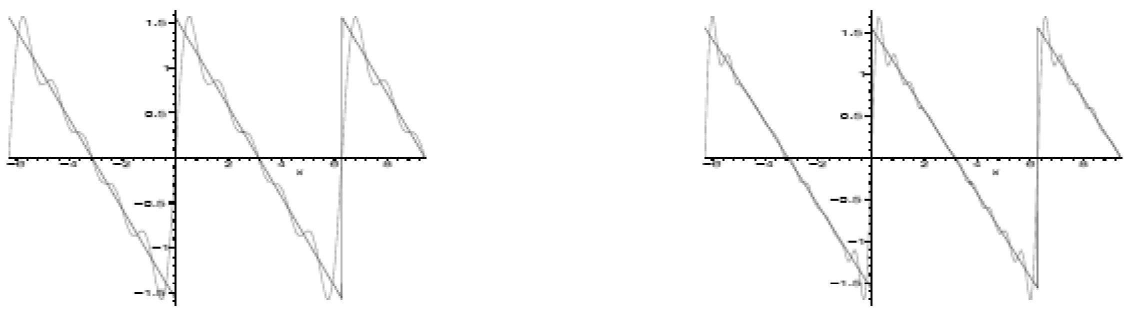


FIGURA 2 GRAFICI OTTENUTI DISEGNANDO LA FUNZIONE SOPRA INDICATA; IL PRIMO DEI DUE CON n = 5 MENTRE IL SECNDO n= 11

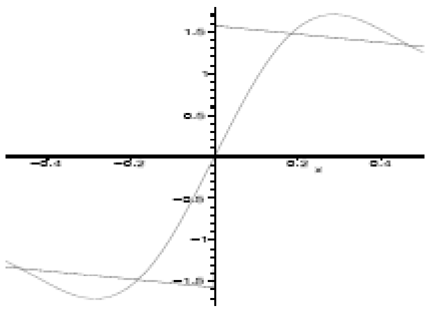


Figura 3 CONFRONTO TRA LA FUNZIONE SOPRA INDICATA E QUELLA A DENTE DI SEGA (LE SCALE SUI DUE ASSI SONO DIVERSE).

Questo grafico assomiglia molto al grafico di un' onda a dente di sega g(t), notiamo che man mano che n aumenta, $f_n(t)$ assomiglia sempre di più a g(t).

Se sovrapponiamo i due grafici noteremo che in prossimità dell' origine g(t) salta, si dice che è una funzione discontinua, infatti per t=0 la funzione non assume nessun valore. La funzione $f(t)$ potrà sempre di più avvicinarsi a g(t) ma in prossimità dell' origine le due funzioni non potranno palesemente essere simili neanche all' aumentare di n.

Immaginiamo ora di essere il programmino del Prof. Baldo, come possiamo fare a trovare quella funzione che si avvicina di più a quella del dente di sega?

Ecco che dobbiamo trovare un modo per definire la distanza tra le due funzioni: in "matematichese" esistono diversi modi per calcolare questo valore, prenderemo quello a noi più utile. Può essere ragionevole imitare la distanza tra punti euclidea, solo che applicata alle funzioni $f_n(t)$ e g(t).

$$\mathrm{dist}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Analogamente potremo dire che date le nostre due funzioni periodiche $f_n(t)$ e g(t), la loro "distanza euclidea" si ottiene prendendo la radice quadrata delle "somme" dei valori di

$(f_n(t) - (g(t))^2$ al variare di t tra –π e +π, dato che le funzioni sono periodiche di 2π. Abbastanza intuitivamente tale somma però avrebbe infiniti addendi, essendo infiniti i valori di t. Sarebbe come voler calcolar la distanza fra due punti appartenenti ad uno spazio ad infinite dimensioni:

$$\mathrm{dist}\big((x_1, y_{1,\ldots\ldots}n_1)\ ;\ (x_2, y_{2,\ldots\ldots}n_2)\big) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \ (y_2 - y_1)^2 + \cdots \ldots + \ (n_2 - n_1)^2}$$

Per ovviare a questa operazione con infiniti addendi possiamo disegnare la funzione $h(t)=(f_n(t) - (g(t))^2$, che ci rappresenta per ogni valore di t, il valore del quadrato della distanza tra la funzione $f_n(t)$ e $g(t)$.

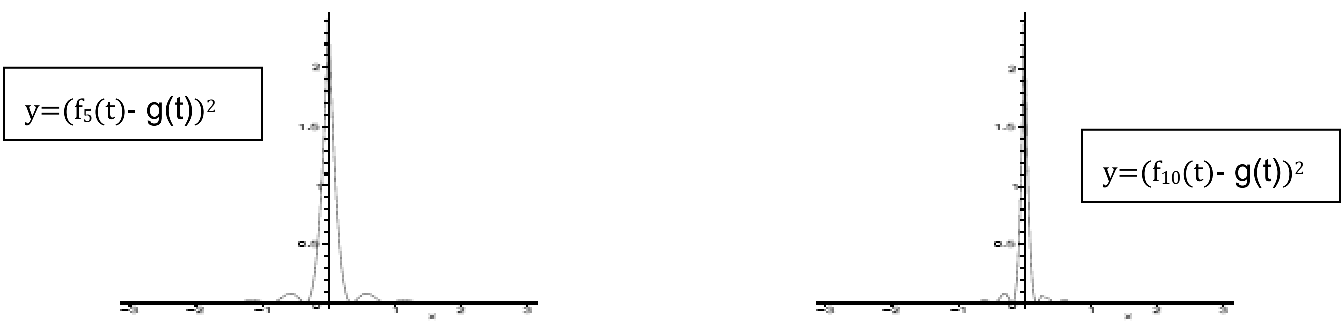


Figura 4 I due grafici rappresentano la funzione $h(t)=(f_n(t) - (g(t))^2$

Come si vede la distanza tra le due funzioni è minore per n=10. Può allora diventare ragionevole pensare che se noi costruissimo una serie di seni e coseni con infinite armoniche, la nostra funzione tenderebbe a diventare congruente a quella che vogliamo studiare. Ritornando alla distanza tra le due funzioni, risulta abbastanza astuto sostituire al quadrato della distanza euclidea l' area compresa fra la curva $h(t)=(f_n(t) - (g(t))^2$ e l' asse delle x tra –π e +π. Quindi definiamo la distanza tra due funzioni come:

$$d(\ f_{n(t)}, g(t)) = \sqrt{A_{(fn-g)^2}} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \big(f_n(t) - g(t)\big)^2}$$

Quella che abbiamo dato, sembra una ragionevole definizione di distanza tra le due funzioni: in effetti, l'area sarà tanto più piccola, quanto più le due funzioni avranno grafici "simili".

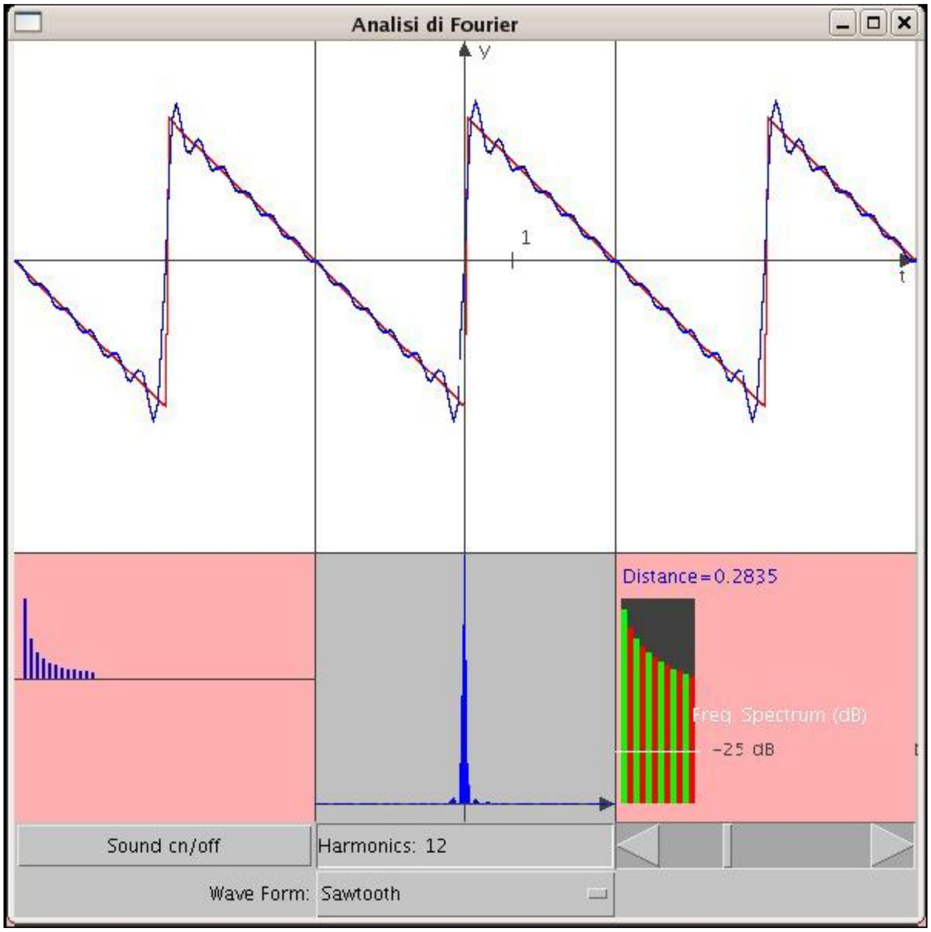


Figura 5 Interfaccia del secondo programmino java , ci permette di ascoltare dei suoni regolando il numero di armoniche.

Questo secondo programmino, ci aiuta a fare degli esperimenti con i suoni.

Un giochino divertente potrebbe essere quello di disegnare a nostro piacimento un' onda periodica , e poi ascoltare come all' aumentare delle armoniche il computer riesca a riprodurlo quasi esattamente uguale. La slide di destra indica il numero di armoniche che si vogliono utilizzare. Se indichiamo di utilizzare una sola armonica, il suono che viene prodotto è quello del La_3 che non a caso avevamo detto essere la frequenza fondamentale. Aumentando man mano le armoniche il suono diventa molto simile a quello desiderato.

A mio parere il fatto di aumentare le armoniche all' infinito è corretto sul piano algebrico, ma bisogna ricordare che la fisiologia dell' orecchio non permette di percepire frequenze superiori a 20 KHz.

Un' altra interessante osservazione riguarda ancora la fisiologia del nostro apparato uditivo: proviamo ad ascoltare le seguenti due onde:

$$\mathrm{f(t)} = \sum_{n=1}^{11} \left(\frac{1}{n} \sin nt\right)$$

e

$$\tilde{\mathrm{f}}(t) = \sum_{n=1}^{11} \left(\frac{1}{n} \sin(nt + \varphi_n)\right)$$

Le due onde suonano perfettamente uguali! Ma chiaramente le loro leggi orarie sono completamente diverse! In realtà le armoniche che compongono il suono sono le stesse, l' unica differenza è che sono sfasate di φ_n. Ecco come viene ingannato il nostro orecchio, esso infatti percepisce solamente le diverse armoniche, non l' angolo di fase che le distinguerebbe. Il timbro di uno strumento non è dunque necessariamente legato alla forma d' onda.

Ma torniamo alla domanda iniziale: come fa il computer a trovare i coefficienti che contraddistinguono ogni armonica?

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \underbrace{a_1 \cos t + b_1 \sin t}_{\boxed{\text{I° armonica}}} + \underbrace{a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t)}_{\boxed{\text{II° armonica}}} + \ldots + a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

Prima ci occuperemo di risolvere un problema più semplice: immaginiamo che qualcuno ci fornisca la forma d' onda di una funzione f(t), e ci dica che essa è un polinomio trigonometrico ottenuto con somme di seni e coseni ma non si ricordi i coefficienti.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t) + \dots + a_6 \cos(6t) + b_6 \sin(6t)$$

Cerchiamo un metodo per aiutarlo a ritrovarli!

Un' operazione lecita è quella di fare l' integrale di entrambi i membri:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} [\frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos(2\,t) + b_2 \sin(2t) + \cdots + a_6 \cos(6t) + b_6 \sin(6t)]$$

Ricordando che $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) = 0$,

avremo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) = \pi a_0$$

E così possiamo ricavarci a_0. Se moltiplichiamo entrambi i membri per il cos(4t):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos 4t = \int_{-\pi}^{\pi} \cos 4t\, [\frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t) + a_6 \cos(6t) + b_6 \sin(6t)]$$

Ricordando che $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(4t)$ = 0 per n$\neq 4$, mentre quando n=4 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(4t) \cos(4t)$ =π otterremo che

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(4t) = \pi a_4$$

Generalizzando :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)$$

I coefficienti così ottenuti in “matematichese” prendono il nome di coefficienti di Fourier di f.

Ma ritorniamo al problema iniziale, supponiamo di prendere una qualsiasi funzione g(t) periodica di 2π; e di volerla approssimare il più possibile con una del tipo:

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos(2\,t) + b_2 \sin(2t) + \ldots + a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

Quali sono i migliori coefficienti da sostituire? Diventa scontato provare a utilizzare i suddetti coefficienti di Fourier. In altre parole il polinomio trigonometrico:

$$\widetilde{f_n}(t) = \frac{\widetilde{a_0}}{2} + \widetilde{a_1} \cos t + \widetilde{b_1} \sin t + \ldots + \widetilde{a_n} \cos(nt) + \widetilde{b_n} \sin(nt)$$

se costruito con i coefficienti Fourier:

$\widetilde{a_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)$ $\widetilde{b_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)$

Con n=0,1,2,3,4…$\in \mathbb{N}$

sarà quello che meglio approssima la nostra funzione g(t). Ma ne siamo veramente sicuri?

Basterà andare a minimizzare la distanza tra le due funzioni: utilizzano il metodo della distanza tra funzioni definito sopra e alcune semplici proprietà degli integrali.

g(t) sarà quindi la funzione che dobbiamo approssimare, mentre $f_n(t)$ il polinomio trigonometrico che meglio approssima $g(t)$, o meglio dovremo scegliere i coefficienti del polinomio in modo che la distanza tre le due sia la minore possibile.

$$[\mathrm{dist}(f_n, g)]^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [f_n(t) - g(t)]^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)^2 + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)^2 - 2\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\, g(t)$$

Sviluppando il doppio prodotto:

$$-2\int_{-\pi}^{\pi} [f_n(t)g(t)$$
$$= -2\left[\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} g(t) + a_1\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(t) + b_1\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(t) +]\, a_2\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(2t) + b_2\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(2t) + \cdots + a_n\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt) + b_n\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)\right]$$

Si noti come i termini dell' espressione ricalchino proprio i coefficienti di Fourier.

Sviluppando i calcoli e facendo riferimento alle proprietà degli integrali l' espressione può essere contratta nella forma:

$$-2\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)g(t) = -2\pi[\frac{a_0}{2}\widetilde{a_0} + a_1\widetilde{a_1} + b_1\widetilde{b_1} + \cdots a_n\widetilde{a_n}]$$

Ci rimane solo da sviluppare il quadrato di $f_n(t)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [\frac{a_0}{2} + a_1\cos t + b_1\sin t + a_2\cos(2t) + b_2\sin(2t) + \ldots + a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)]^2$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{{a_0}^2}{4} + \int_{-\pi}^{\pi}{a_1}^2\cos(t)^2 + \int_{-\pi}^{\pi}{b_1}^2\sin(t)^2 + \cdots. + \int_{-\pi}^{\pi}{a_n}^2\cos(nt)^2 + \int_{-\pi}^{\pi}{b_n}^2\sin(nt)^2 + 2(\ldots.)$$

....Continuando con tutti i doppi prodotti. Si noti che comunque saranno tutti =0.

Applicando le proprietà degli integrali e le relazioni di ortogonalità giungeremo alla seguente forma:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)^2 = \pi\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \pi{a_1}^2 + \pi{b_1}^2 \ldots. + \pi{a_n}^2 + \pi{b_n}^2$$

Riprendendo l' espressione iniziale:

$$\mathrm{dist}(f_n, g) = \int_{-\pi}^{\pi}[f_n(t) - g(t)]^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)^2 + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)^2 - 2\int_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\,g(t)$$

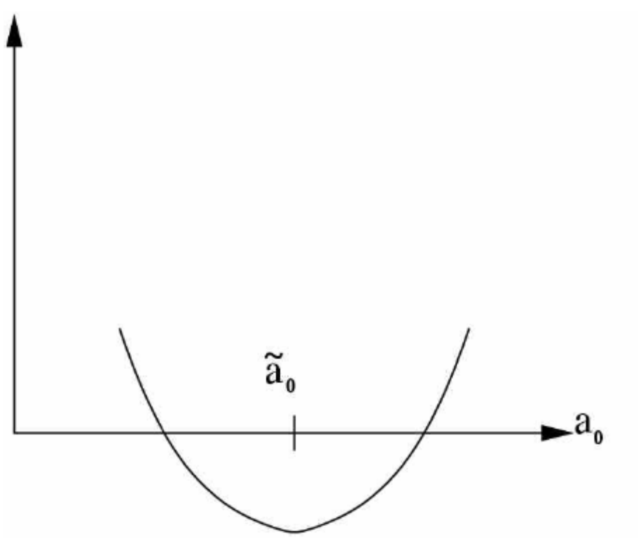
E sostituendo le espressioni sopra elaborate:

$$\mathrm{dist}(f_n, g) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)^2 + \pi\left[\frac{1}{2}({a_0}^2 - 2a_0\widetilde{a_0}) + ({a_1}^2 - 2a_1\widetilde{a_1}) + ({b_1}^2 - 2b_1\widetilde{b_1}) + .\ldots + ({a_n}^2 - 2a_n\widetilde{a_n}) + ({b_n}^2 - 2b_n\widetilde{b_n})\right]$$

Lo scopo del nostro lavoro era quello di trovare i coefficienti a_n e b_n che rendevano la distanza tra le due funzioni la più piccola possibile, è ragionevole pensare che per minimizzare questa distanza basterà che ogni termine racchiuso tra parentesi diventi il più piccolo possibile. Per esempio prendiamo il termine che contiene il coefficiente a_1.

$$Y = ({a_1}^2 - 2a_1\widetilde{a_1})$$

Ponendo come incognita il nostro coefficiente $a_1 = x$



$y = (x^2 - 2x\widetilde{a_1})$

La funzione sopra indicata è una parabola con la concavità verso l' alto.

Per minimizzare il valore dell' espressione basterà sostituire al posto dell' incognita x il valore dell' ascissa del vertice della rispettiva parabola.

$$\mathrm{x_v} = -\frac{b}{2a} = \frac{2\widetilde{\mathrm{a}_1}}{2}$$

$$\mathrm{a}_1 = +\widetilde{\mathrm{a}_1}$$

Affinché il polinomio trigonometrico sia la migliore approssimazione dell' onda che vogliamo studiare deve avere per coefficienti proprio quelli di Fourier.

Abbiamo così, attraverso una serie di Fourier, eseguito la spettro di un suono periodico: scomponendolo nelle armoniche multiple che lo compongono e analizzando di queste le varie ampiezze. Questa scomposizione sta alla base di tutti i metodi di compressione di file musicali e immagini.