X varietà proiettiva liscia su $\mathbb{K}$

$\mathbb{K}$ algebricamente chiuso

$\dim X = n$

Teorema

X ha un raggio non nef di lunghezza $\geq n-1$

$$\Updownarrow$$

X è lo scoppiamento in un punto di X' liscia.

Ingredienti - Curve razionali

$\mathbb{H}\mathrm{om}(\mathbb{P}^1, X)$
Schema che parametrizza $f : \mathbb{P}^1 \to X$

$\mathbb{H}\mathrm{om}_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \subset \mathbb{H}\mathrm{om}(\mathbb{P}^1, X)$ aperto

$\mathbb{H}\mathrm{om}^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X)$ normalizzazione di $\mathbb{H}\mathrm{om}_{bir}(\mathbb{P}^1, X)$

$\mathrm{Ratcurves}^n(X)$ quoziente di $\mathbb{H}\mathrm{om}^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X)$ per l'azione di $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$

$\mathrm{Univ}(X)$ quoziente di $\mathbb{H}\mathrm{om}^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \times \mathbb{P}^1$ per l'azione prodotto.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Univ}(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\
\mathrm{Ratcurves}^n(X) &
\end{tikzcd}$$

$V \subset \mathsf{Ratcurves}^n(X)$ irriducibile
Famiglia di curve razionali

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ V & \end{tikzcd}$$

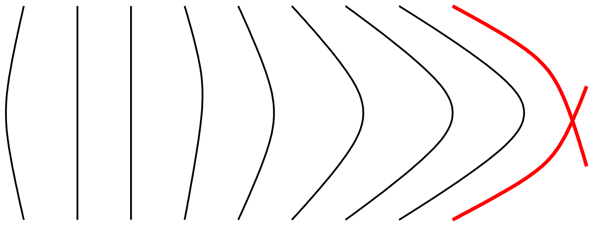
$\mathsf{Locus}(V) = i(U)$
$\mathsf{Locus}(V, x) = i(\pi^{-1}(\pi(i^{-1}(x))))$

- Y localmente intersezione completa
  $f : \mathbb{P}^1 \to C \subset Y$ t.c. $C \not\subset \mathsf{Sing}(Y)$
  V_C componente di $\mathsf{Ratcurves}^n(X)$ di C

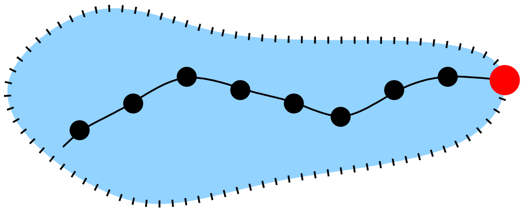
$$\dim V_C \geq -K_Y \cdot C + \dim Y - 3$$

- X normale, H ampio Cartier, V famiglia t.c. $\mathsf{Locus}(V, x) = X$, $H \cdot V = 1$ e $-K_X \cdot H^{n-1} > (n-1)H^n$.
  Allora $(X, H) \simeq (\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$

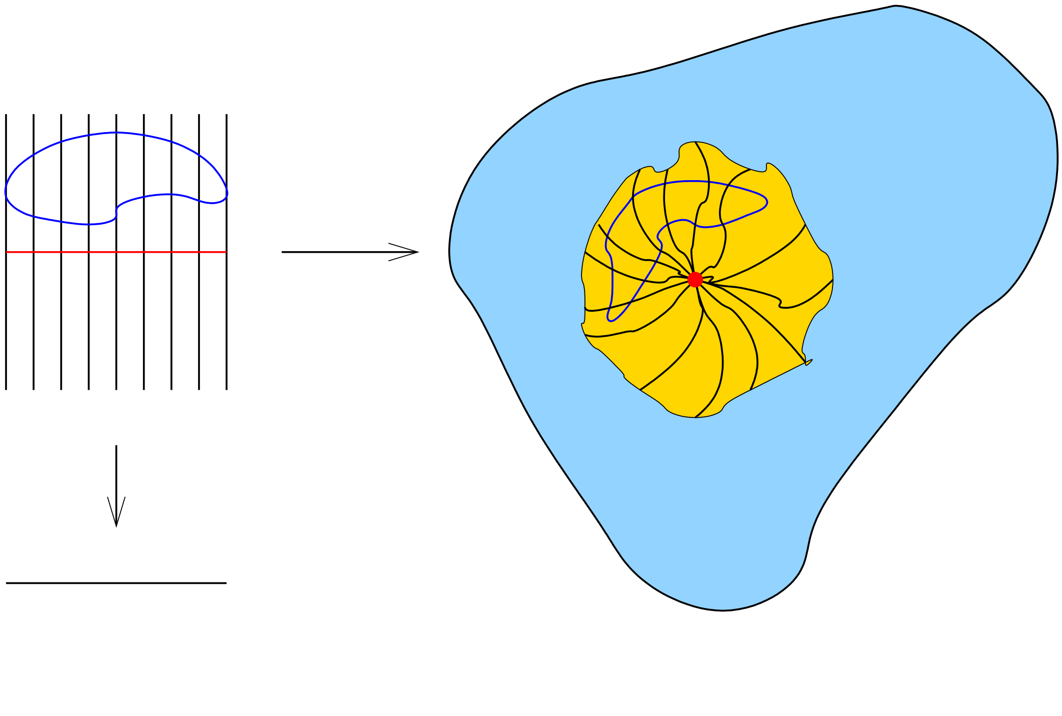
V è *non spezzante*



sse V propria



- $C \subset$ Locus$(V, x) \quad \Rightarrow \quad C \equiv \lambda C_V$



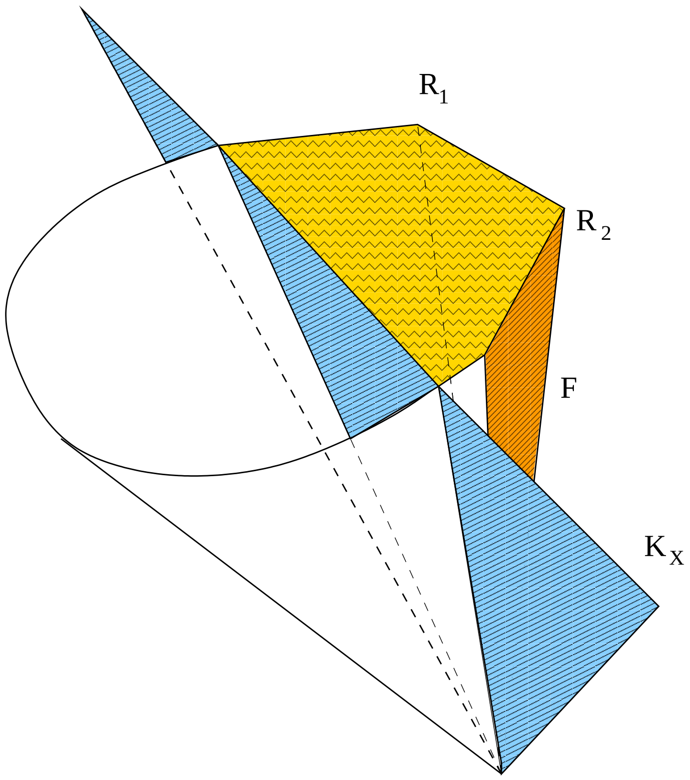
- $\dim V = \dim \mathrm{Locus}(V) + \dim \mathrm{Locus}(V, x) - 2$

- $\dim \mathrm{Locus}(V) + \dim \mathrm{Locus}(V, x) \geq n - K_X \cdot V - 1$

Ingredienti - Teoria di Mori

$$N_1(X) = \frac{\{1\text{-}cicli\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R},\ N^1(X) = \frac{\{divisori\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R}$$

$$\overline{NE(X)} = \overline{\{\text{1-cicli effettivi}\}} \subset N_1(X) \simeq \mathbb{R}^{\rho(X)}$$



Teorema del cono (Mori)

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}_{K_X \geq 0}(X) + \sum \mathbb{R}_+[C_j]$$

C_j razionale irriducibile ridotta e $K_X \cdot C_j < 0$.
$\mathbb{R}_+[C_j]$ discreti in $\{Z \in N_1(X) \mid K_X \cdot Z < -\varepsilon\}$

$R = \mathbb{R}_+[C]$ **raggio estremale** di X.

$$l(R) = \min_{[\Gamma] \in R} -K_X \cdot \Gamma$$

lunghezza di R

C con $-K_X \cdot C = l(R)$
curva minima estremale

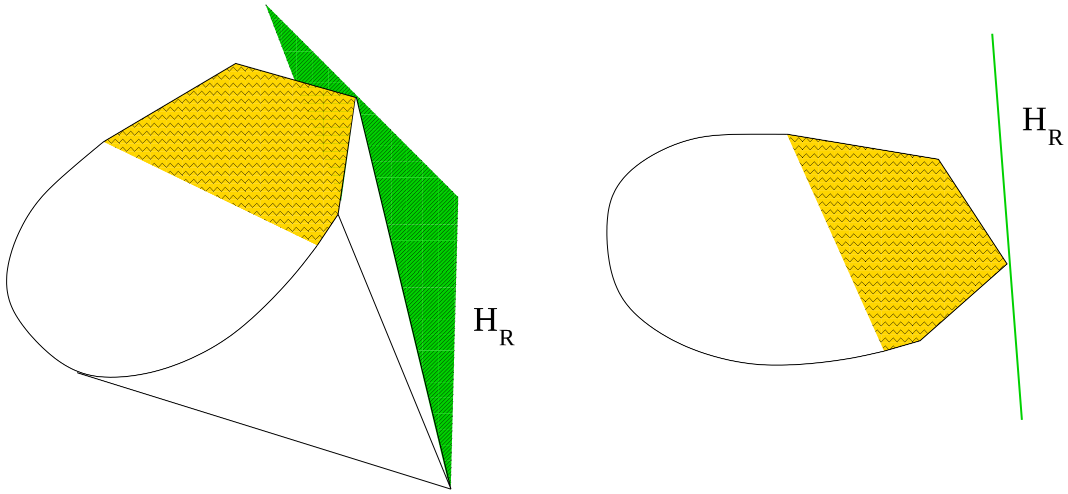
V_C componente corrispondente di $\mathrm{Ratcurves}^n(X)$

V_C è non spezzante

$$\mathrm{Locus}(R) := \cup \, \mathrm{Locus}(V_C)$$

H_R divisore che supporta R

- H_R nef.
- $H_R.z = 0$ sse $z \in R$.



- $(H_R)^n = 0$ sse $E \cdot R \geq 0 \quad \forall\ E$ effettivo, R si dice **nef** e Locus(R) $= X$.

- $(H_R)^n > 0$ sse $\exists\ E$ effettivo t.c. $E \cdot R < 0$. R si dice **non nef** e Locus(R) $\subseteq E$.

$\varphi : X \to X'$ scoppiamento in un punto liscio.
$E \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ divisore eccezionale. $E_E \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)$

A ampio su X' t.c. $K_{X'} + A$ ampio

$$H = K_X - (n-1)E + \pi^* A = \pi^*(K_{X'} + A)$$

H è nef ed è zero solo sulle curve di E.
H individua R raggio non nef

l retta in E

$$E \cdot l = -1$$

$$-K_X \cdot l = -(n-1)E \cdot l = n-1$$

$$l(R) = n-1$$

Idea della dimostrazione

$f : \mathbb{P}^1 \to C \subset E = \mathrm{Locus}(R)$ con $[C] \in R$

V_C famiglia non spezzante

$\mathrm{Locus}(V_C) \subset E$

$$2 \dim E \geq \dim \mathrm{Locus}(V_C) + \dim \mathrm{Locus}(V_C, x) \geq$$
$$\geq \dim X - K_X \cdot V_C - 1 \geq 2n - 2$$

$$\dim E = n - 1$$

$$l(R) = n - 1$$

$$\dim V_C = 2n - 4$$

$$E = \mathrm{Locus}(V_C, x) \quad \Rightarrow \quad \rho(E) = 1$$

$$C \not\subseteq \mathsf{Sing}(E)$$

V_C^E componente di $\mathsf{Ratcurves}^n(E)$ di C

$$V_C^E \subseteq V_C$$

$$\dim V_C^E \geq -K_E \cdot C + \dim E - 3$$

$$\begin{aligned} -K_E \cdot C &\leq \dim V_C^E - \dim E + 3 = \\ &\leq \dim V_C - \dim E + 3 = \\ &= 2n - 4 - (n-1) + 3 = n \end{aligned}$$

Per aggiunzione

$$E_E = (-K_X)_E + K_E$$

$$0 > E \cdot C = (-K_X)_E \cdot C + K_E \cdot C \geq -1$$

$$E \cdot C = -1 \qquad -K_E \equiv nE$$

$\pi : \widetilde{E} \to E$ normalizzazione

$$-K_{\widetilde{E}} = -\pi^* K_E + \mathcal{C}_\pi$$

$\mathcal{C}_\pi$ conduttore di π: divisore effettivo che è zero sse π è isomorfismo

$$-K_{\widetilde{E}}(-\pi^* E_E)^{n-2} \geq -K_E(-E_E)^{n-2} =$$

$$= n(-E_E)^{n-1} = n(-\pi^* E_E)^{n-1}$$

$V_C^{\widetilde{E}}$ sollevamento della famiglia a $\widetilde{E}$

$$-\pi^* E_E \cdot \widetilde{C} = 1$$

$$(\widetilde{E}, -\pi^* E_E) \simeq (\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$$

$$-K_{\widetilde{E}} = -n\pi^* E_E + \mathcal{C}_\pi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}_\pi = 0$$

$$(E, -E_E) \simeq (\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$$

Criterio di Castelnuovo

X superficie liscia. $E \subset X$ curva razionale liscia t.c. $E_E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$. Allora esiste $\varphi : X \to X'$ scoppiamento in un punto di X' liscia.

Con la stessa dimostrazione si prova che

X varietà liscia. $E \simeq \mathbb{P}^{n-1} \subset X$ divisore t.c. $E_E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)$. Allora esiste $\varphi : X \to X'$ scoppiamento in un punto di X' liscia.

Osservazione. Per le superfici gli unici raggi estremali non nef hanno lunghezza uno e sono scoppiamenti di punti lisci. In dimensione più alta le cose si complicano.

Tre al prezzo di uno

X proiettiva liscia su $\mathbb{C}$, $\dim X = n$

Teorema. *R raggio non nef, $l(R) = n-2$.*
$\varphi : X \to X'$ contrazione di R, $E = Exc(\varphi)$.

- $\varphi(E) = *$, $(E, E_E) \simeq (\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2))$
- $\varphi(E) = *$, $(E, E_E) \simeq (\mathbb{Q}^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}(-1))$
- *X' liscia, φ scoppiamento lungo una curva liscia $\varphi(E) \subset X'$.*

Teorema. *$\varphi : X \to X'$ contrazione di R*
φ divisoriale equidimensionale, $\dim F = l(R)$.

$$\Updownarrow$$

$\varphi : X \to X'$ scoppiamento liscio di X' lungo una sottovarietà liscia di codimensione $l(R) + 1$.