Successione di Eulero-Jaczewski e problema di Remmert-Van de Ven per varietà toriche

Gianluca Occhetta e Jaroslaw Wiśniewski

Il problema di Remmert-Van de Ven

Congettura [R-VdV 1961]

Sia Y una varietà proiettiva liscia di dimensione positiva e $\varphi : \mathbb{P}^n \to Y$ un morfismo suriettivo. Allora $Y \simeq \mathbb{P}^n$.

Teorema [Lazarsfeld 1983]
La congettura R-VdV è vera.

Osservazione: E' immediato vedere che φ è un morfismo finito e che $\rho(Y) = 1$.

Generalizzazioni

Teorema [Paranjape-Srinivas 1989] Sia Y una varietà proiettiva liscia di dimensione positiva e $\varphi : \mathbb{Q}^n \to Y$ un morfismo suriettivo. Allora $Y \simeq \mathbb{P}^n$ o $Y \simeq \mathbb{Q}^n$.

Teorema [Hwang-Mok 1999] Sia $\varphi : X \to Y$ un morfismo finito tra varietà lisce di dimensione n. Se X è uno spazio omogeneo razionale con $\rho(X) = 1$ e φ non è un isomorfismo, allora $Y \simeq \mathbb{P}^n$.

Teorema Sia X una varietà torica completa e Y una varietà proiettiva liscia con $\rho(Y) = 1$. Se $\varphi : X \to Y$ è un morfismo suriettivo, allora $Y \simeq \mathbb{P}^n$.

Varietà toriche - Notazioni e richiami

$X = X(\Sigma)$ varietà torica.

Σ ventaglio in $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$

$\mathbf{N}$ reticolo dei sottogruppi ad 1 parametro di $\mathbb{T} \simeq (\mathbb{C}^*)^n$

$\mathbf{M} = \mathbf{N}^{\vee}$

$\Sigma^1 = \{\rho_i : i \in I\}$ raggi in Σ.

D_i divisori in X associati ai raggi $\rho_i \in \Sigma^1$.

Teorema (Lemma di Chow torico) Sia $X(\Delta)$ una varietà torica completa. Allora esiste una varietà torica proiettiva $X(\Delta')$ e un morfismo torico birazionale $\pi : X(\Delta') \to X(\Delta)$.

Teorema [Blanchard] X liscia, G gruppo algebrico connesso che agisce su X t.c. l'azione su Pic(X) sia banale (e.g. $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$).
Allora un morfismo proiettivo $\varphi : X \to Y$ t.c. $\varphi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ è equivariante.

Corollario $X(\Delta')$ varietà torica $\varphi : X(\Delta') \to Y$ morfismo su Y proiettiva, $X \to X' \to Y$ fattorizzazione di Stein di φ. Allora $X' = X(\Sigma')$ è torica.

Teorema Sia $X(\Sigma')$ una varietà torica. Allora esiste una suddivisione Σ di Σ' tale che il morfismo torico corrispondente $X(\Sigma) \to X(\Sigma')$ è una risoluzione di singolarità.

Passo di riduzione

$$\begin{tikzcd}
 & X(\Delta') \arrow[dl] \arrow[d, "2"] \arrow[dr] & \\
X(\Delta) \arrow[r, "1"] & Y & X(\Sigma') \arrow[l, "3"'] \\
 & X(\Sigma) \arrow[u, "4"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$X(\Delta')$ proiettiva.
$X(\Sigma')$ proiettiva t.c. $\dim X(\Sigma') = \dim Y$.
$X(\Sigma)$ proiettiva liscia t.c. $\dim X(\Sigma) = \dim Y$.

La succesione di Eulero-Jaczewski

X varietà algebrica completa

$H = H^1(X, \Omega_X) \qquad \mathcal{H} = H \otimes \mathcal{O}_X$

La successione

$$0 \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \mathcal{P}_X^\vee \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

che viene da $Id_H \in \mathrm{Hom}(H, H) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{H}, \Omega_X)$ è la successione di Eulero-Jaczewski di X.
$\mathcal{P}_X$ è detto fascio potenziale di X.

Teorema [Jacewski] Una varietà completa connessa liscia X è una varietà torica $\Longleftrightarrow \exists$ un divisore D a incroci normali t.c.

$$\mathcal{P}_X = \oplus_{i \in I} \mathcal{O}_X(D_i)$$

D_i componenti irriducibili di D.
In tal caso i D_i sono le chiusure delle orbite di codimensione 1 del toro.

Su una varietà torica abbiamo la successione

$$0 \longrightarrow \mathbf{M} \longrightarrow Div^T X \longrightarrow Pic(X) \longrightarrow 0;$$

dualizzando e $\otimes\mathbb{C}$ otteniamo

$$0 \longrightarrow N_1(X)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \oplus_{i\in I}\mathbb{C}[\rho_i] \longrightarrow \mathbf{N}_{\mathbb{C}} \longrightarrow 0.$$

Lemma 1 $\varphi : X \to Y$ morfismo suriettivo e genericamente finito, X torica. $J(\varphi) = \{i \in I |\ \varphi_* D_i$ è un divisore$\}$. Allora $\oplus_{j\in J}\mathbb{C}[\rho_j] \longrightarrow \mathbf{N}_{\mathbb{C}}$ è suriettivo.

Per X torica $H^1(X, \Omega_X) = Pic(X)_{\mathbb{C}}$, quindi $N_1(X)_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}_X = \mathcal{H}^\vee$.

$\mathcal{D}_i = \mathbb{C}[\rho_i] \otimes \mathcal{O}_X$, $\mathcal{N} = \mathbf{N}_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}_X$ abbiamo un diagramma commutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^\vee \arrow[r] \arrow[d, equal] & \oplus \mathcal{D}_i \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{N} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^\vee \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_{i \in I} \mathcal{O}_X(D_i) \arrow[r] \arrow[d] & TX \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \oplus \mathcal{O}_{D_i}(D_i) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \oplus \mathcal{O}_{D_i}(D_i) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Lemma 2 + diagramma + φ genericamente finita $\Rightarrow$

$$\oplus_{j \in J} \mathcal{O}_X(D_j) \longrightarrow TX \longrightarrow \varphi^* TY$$

genericamente suriettiva.

L'ombra di Mori

Teorema [Mori 1979] Una varietà proiettiva liscia Y di dimensione n ha fibrato tangente TY ampio se e solo se $Y \simeq \mathbb{P}^n$.

Passi fondamentali della dimostrazione sono:

(1) Se $-K_Y$ è ampio, allora per un punto generico $y \in Y$ esiste una curva razionale $\varphi : \mathbb{P}^1 \to Y$ tale che $-K_Y.f(\mathbb{P}^1) \leq n+1$.

(1 bis) Se $-K_Y$ è ampio, allora esiste una componente irriducibile $V \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, Y)$ di grado anticanonico $\leq n+1$ che è dominante.

(2) Se esiste un punto $y \in Y$ tale che per ogni curva razionale $f : \mathbb{P}^1 \to Y$ in V passante per y, f^*TY è ampio, allora $Y \simeq \mathbb{P}^n$.

Dimostrazione del teorema

Nelle nostre ipotesi, poichè $\rho(Y) = 1$ e Y è dominata da una varietà razionale, $-K_Y$ è ampio, e quindi $\exists$ una famiglia come in (1 bis).

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}_X & \xrightarrow[\bar{\varphi}]{} & \mathcal{C}_Y = V \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow[p]{} & V \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{q}} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \\ X & \xrightarrow[\varphi]{} & Y & & \end{array}$$

Lemma 1 D divisore irriducibile su X t.c. $\varphi_* D$ sia ampio su Y. Allora, per ogni $[f] \in V$, $\bar{q}^* D$ è effettivo su ogni componente connessa di $(p \circ \bar{\varphi})^{-1}([f])$.

Scegliamo $y \in Y$ non contenuto in $B_\varphi \cup \varphi(\cup D_i)$, B_φ divisore di diramazione di φ, $f : \mathbb{P}^1 \to Y$ curva in V che passa per y.

Tesi: Per ogni curva razionale $f : \mathbb{P}^1 \to Y$ in V passante per y, f^*TY è ampio, allora $Y \simeq \mathbb{P}^n$.

Il pullback del tangente si decompone:

$$f^*TY \simeq \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_k).$$

Se, per assurdo $a_{\bar{k}} \leq 0$ per qualche $\bar{k}$, allora abbiamo una suriezione

$$f^*TY \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_{\bar{k}})$$

e quindi una suriezione

$$f^*TY \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}.$$

$\bar{q}^*\oplus_J\mathcal{O}(D_j)\to\bar{q}^*\varphi^*TY$

$$\begin{tikzcd}
X_f & \mathbb{P}^1\times[f] & \\
\mathcal{C}_X \arrow[r, "\varphi_V"'] \arrow[d, "\bar{q}"'] & \mathcal{C}_Y \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & V \\
X \arrow[r, "\varphi"'] & Y & \\
 & f(\mathbb{P}^1) &
\end{tikzcd}$$

$\oplus_J\mathcal{O}_X(D_j)\to\varphi^*TY$

$$(\bar{q}^*\varphi^*TY)_{X_f} = \varphi_V^*(q^*TY)_{\mathbb{P}^1\times[f]} = \varphi_V^*(f^*TY)$$

e quindi otteniamo un morfismo g.s.

$$\bar{q}^*(\oplus_J\mathcal{O}_{X_f}(D_j))_{X_f} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_f}.$$

Equivalentemente esiste una sezione in

$$\oplus_J H^0(X_f, \bar{q}^*\mathcal{O}(-D_j))$$

ma D_j è effettivo su ogni componente connessa di X_f per il lemma 1.

Un'applicazione

Teorema X proiettiva liscia di dimensione n, con due strutture di $\mathbb{P}$-bundle $\varphi : X \to Y$ e $\psi : X \to Z$ t.c. $\dim Y + \dim Z = n + 1$.
Allora, o $n = 2m - 1$, $Y = Z = \mathbb{P}^m$ e $X = \mathbb{P}(T\mathbb{P}^m)$ o Y e Z sono $\mathbb{P}$-bundle su una curva liscia C e $X = Y \times_C Z$.