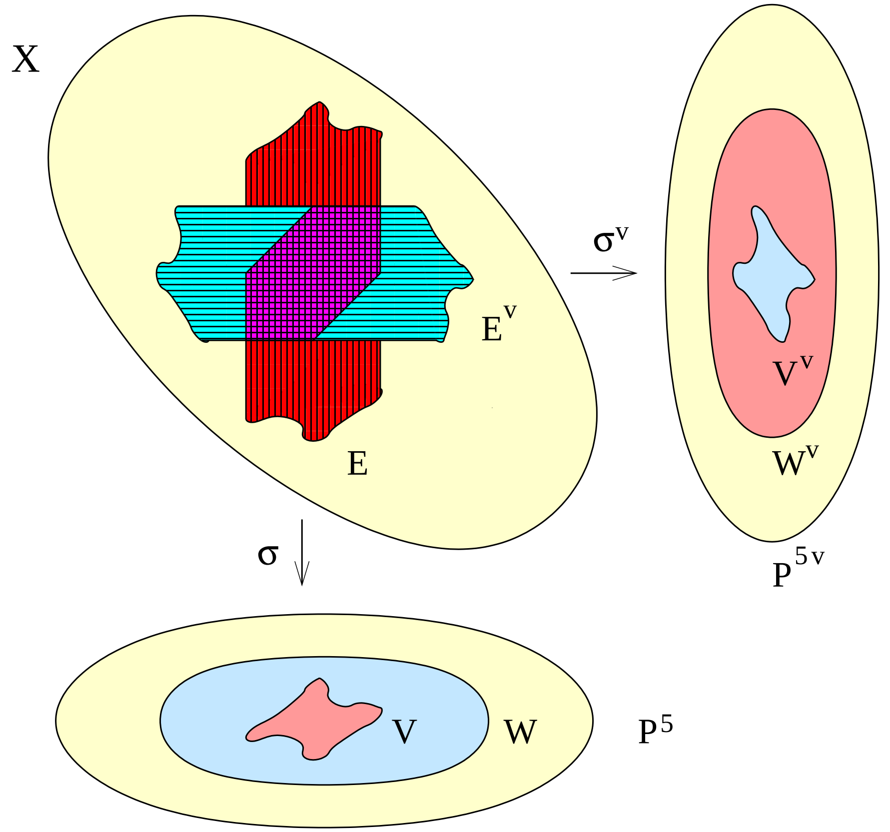
Varietà elementari
da un punto di vista superiore

Gianluca Occhetta

Università di Trento

La varietà delle coniche complete B



$\sigma \; : \; X \; \to \; \mathbb{P}^5$ scoppiamento lungo Veronese V

W varietà secante di V

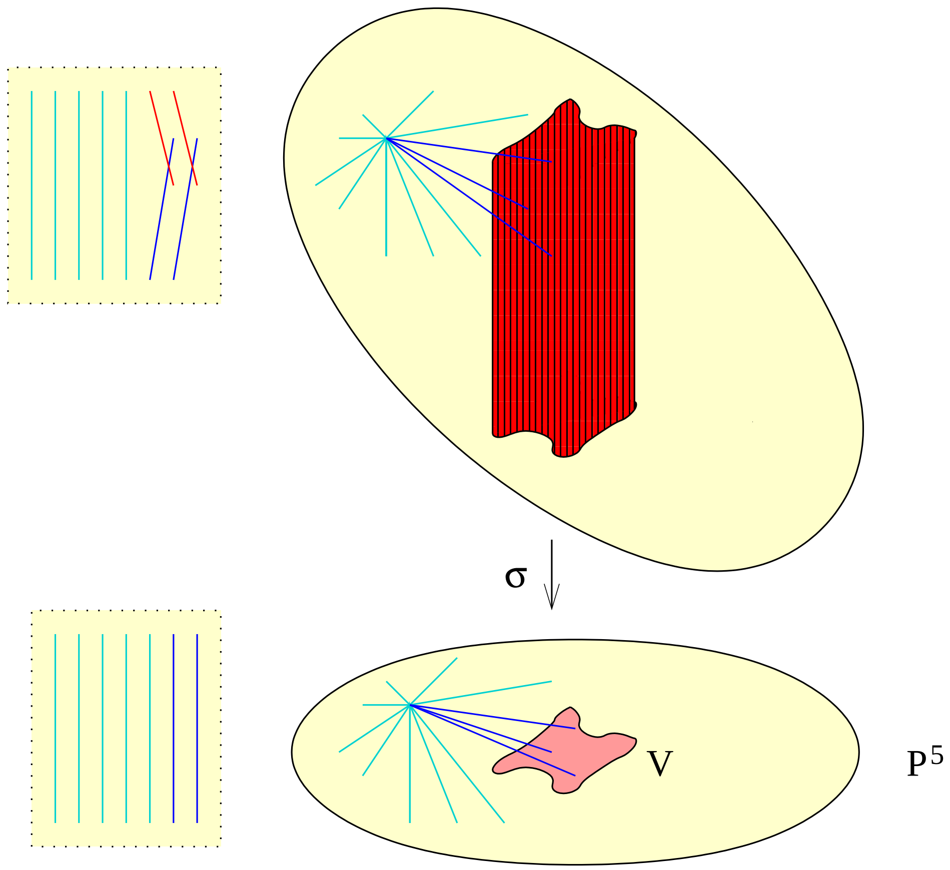
E divisore eccezionale di σ

$\sigma^\vee \; : X \; \to \; \mathbb{P}^{5\vee}$ scoppiamento lungo Veronese duale $V^\vee$

$W^\vee$ varietà secante di $V^\vee$

$E^\vee$ divisore eccezionale di $\sigma^\vee$

Famiglie di curve razionali su B



Famiglia di curve il cui generico elemento è trasformata stretta di una retta di $\mathbb{P}^5$

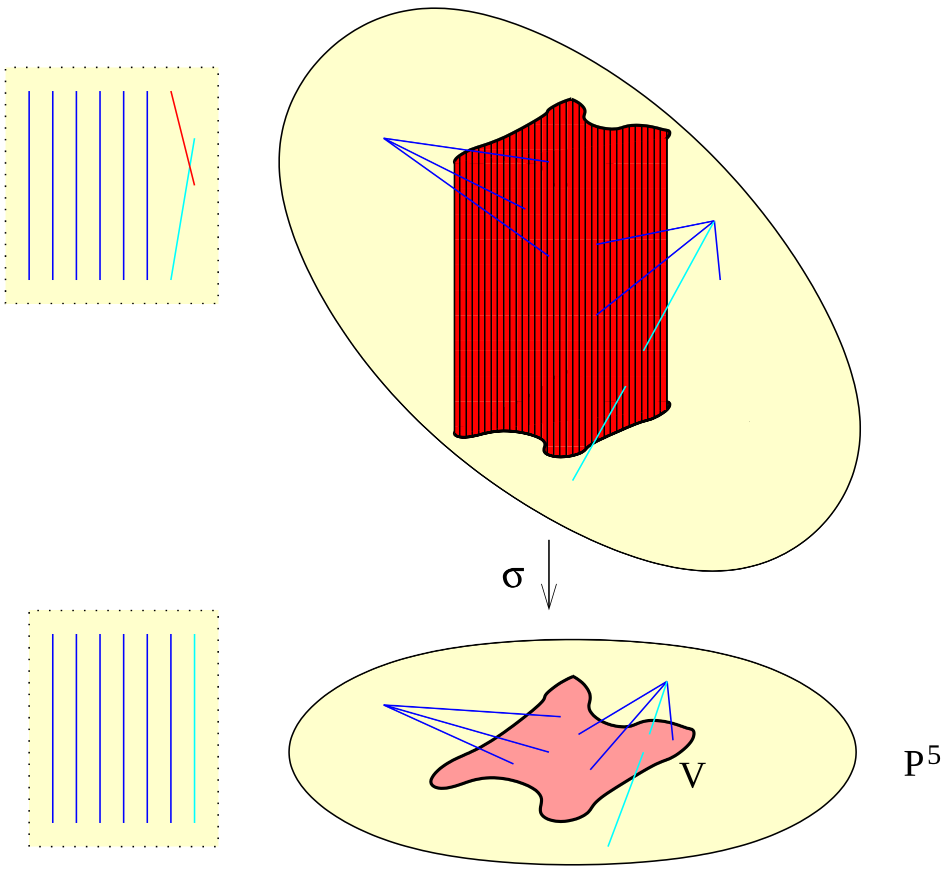
Per $x_1, x_2 \in X$ generici passa un numero finito di curve della famiglia

La famiglia è genericamente non spezzante

Per ogni punto $x \in X$ le curve della famiglia che passano per il punto degenerano in cicli riducibili (trasformata stretta di una retta che taglia V e rette nelle fibre di σ).

La famiglia non è localmente non spezzante

Famiglie di curve razionali su B



Famiglia di curve il cui generico elemento è trasformata stretta di una retta di $\mathbb{P}^5$ che taglia V in un punto

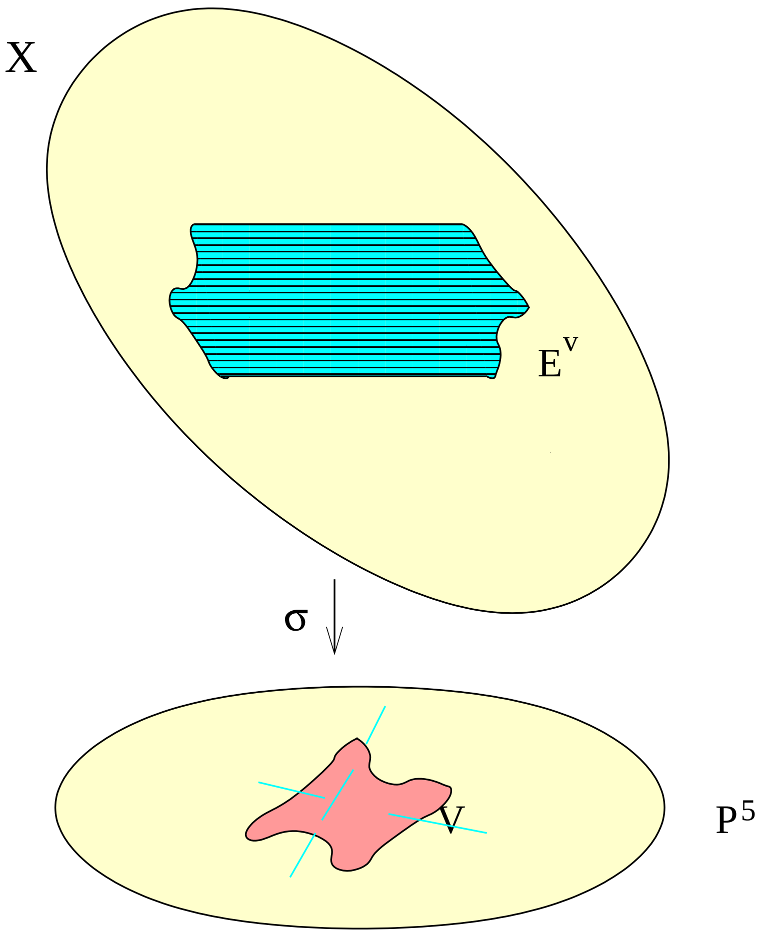
Per $x \in X$ generico le curve che passano per x non degenerano

La famiglia è localmente non spezzante

Se $x \in W$ le curve della famiglia che passano per x degenerano in cicli riducibili (trasformata stretta di una retta che taglia V in due punti e rette nelle fibre di σ).

La famiglia non è non spezzante

Famiglie di curve razionali su B



Famiglia di curve il cui generico elemento è trasformata stretta di una retta di $\mathbb{P}^5$ che taglia V in due punti

Per ogni $x \in E^\vee$ le curve che passano per x non degenerano

La famiglia è non spezzante

Ma le curve della famiglia non coprono X:

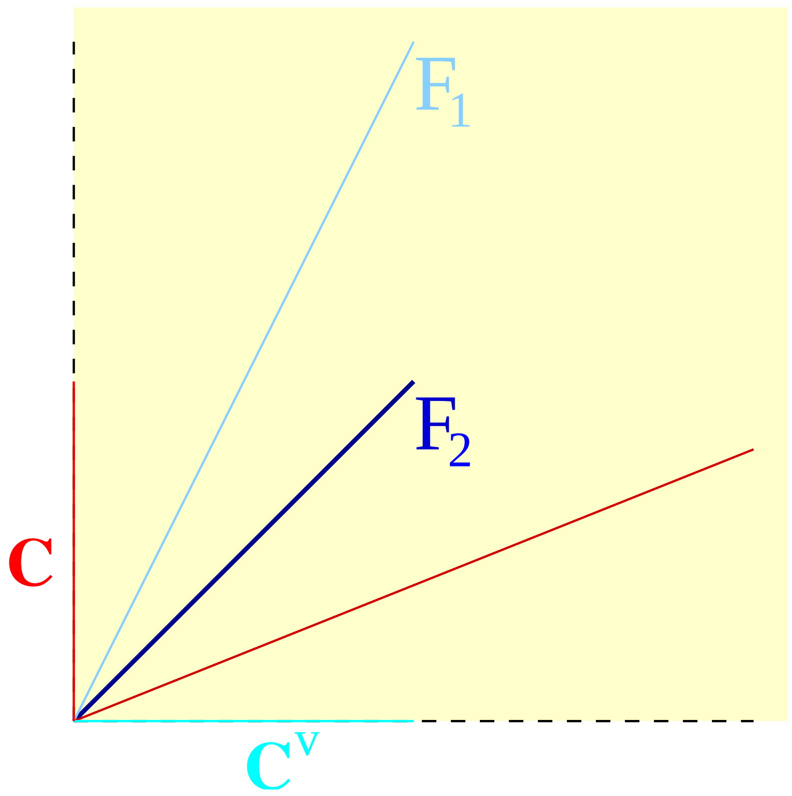
La famiglia non è dominante

Il cono delle curve di B

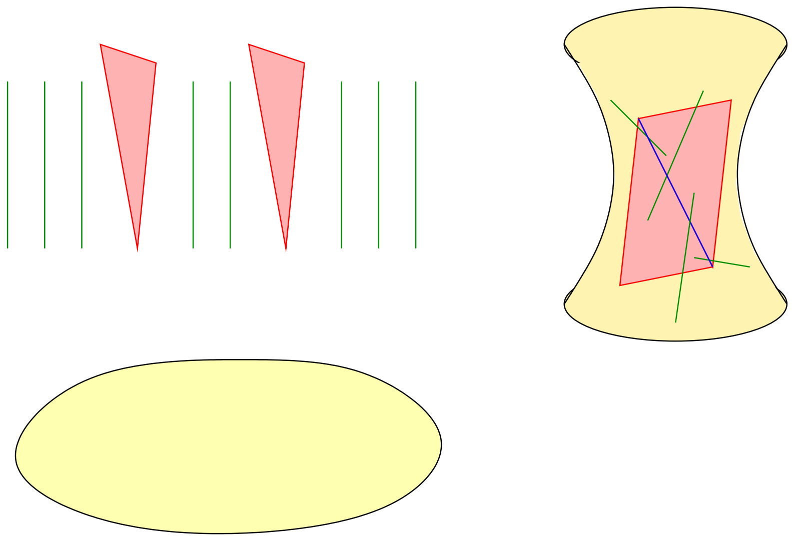
Il cono delle curve $NE(B)$ è generato da due raggi che corrispondono ai due scoppiamenti

F_1 famiglia delle trasformate strette delle rette di $\mathbb{P}^5$

F_2 famiglia delle trasformate strette delle rette di $\mathbb{P}^5$ che tagliano V in un punto



Scoppiamenti di quadriche



$X \longrightarrow \mathbb{Q}^4$ scoppiamento lungo una retta l

Famiglia di curve il cui generico elemento è la trasformata stretta di una retta di $\mathbb{Q}^4$ che taglia l

La famiglia è dominante e non spezzante

I luoghi delle curve che passano per un punto non hanno tutti la stessa dimensione

Famiglie di curve razionali

$\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ schema che parametrizza $f : \mathbb{P}^1 \to X$

$\mathrm{Hom}_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ aperto

$Ratcurves^n(X)$ quoziente di $\mathrm{Hom}^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X)$ per l'azione di $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$

$\mathrm{Univ}(X)$ quoziente di $\mathrm{Hom}^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \times \mathbb{P}^1$ per l'azione prodotto.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Univ}(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\
Ratcurves^n(X) &
\end{tikzcd}$$

Famiglia di curve razionali $V \subset Ratcurves^n(X)$ irriducibile

Famiglie di curve razionali

$$
\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{i} & X \\
{\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\
V & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
U_x & \xrightarrow{i} & X \\
{\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\
V_x & &
\end{array}
$$

$$\mathrm{Locus}(V) = i(U)$$

$$V_x = \pi(i^{-1}(x))$$
$$\mathrm{Locus}(V_x) = i(U_x)$$

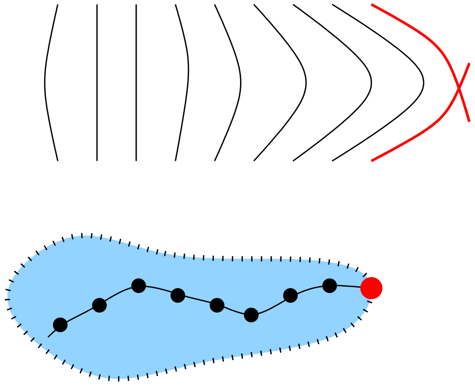
- V non spezzante se V propria
- V localmente non spezzante se V_x propria per x generico in $\mathrm{Locus}(V)$
- V genericamente non spezzante se per $x, y \in \mathrm{Locus}(V)$ generici passano un numero finito di curve di V

Famiglie Chow

Morfismo naturale da $Ratcurves^n(X) \to \mathrm{Chow}(X)$

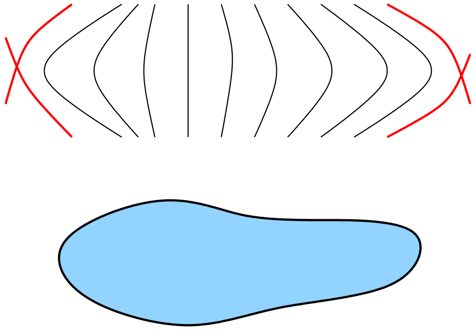
$$V \rightsquigarrow \overline{V} = \mathcal{V} \subset \mathrm{Chow}(X)$$

I cicli riducibili stanno in $\mathcal{V} \setminus V$



$\mathcal{V} \subset \mathrm{Chow}(X)$ Famiglia Chow di curve razionali
Componente irriducibile che parametrizza 1-cicli connessi razionali.

Se V è non spezzante la confonderemo con $\mathcal{V}$.

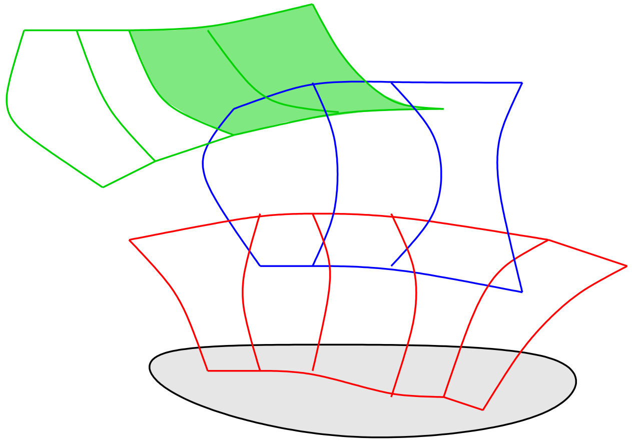


Catene di curve

Y chiuso di X, $\mathcal{V}^1, \dots, \mathcal{V}^k$ famiglie Chow

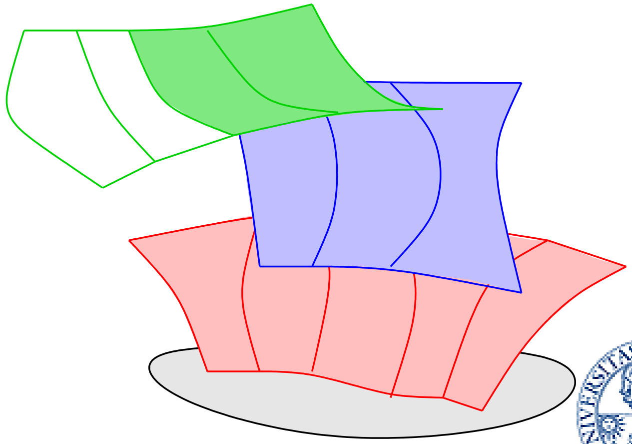
Definizione. $\mathrm{Locus}(\mathcal{V}^1, \dots, \mathcal{V}^k)_Y$: punti $x \in X$ tali che esistono $C_1, \dots, C_k$

- C_i appartiene a $\mathcal{V}^i$
- $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$
- $C_1 \cap Y \neq \emptyset$ e $x \in C_k$



Definizione. $\mathrm{ChLocus}_m(\mathcal{V}^1, \dots, \mathcal{V}^k)_Y$ punti $x \in X$ tali che esistono $C_1, \dots, C_m$

- C_i appartiene a $\mathcal{V}^j$
- $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$
- $C_1 \cap Y \neq \emptyset$ e $x \in C_m$



Stime dimensionali

X liscia V famiglia non spezzante

- $\dim \mathrm{Locus}(V) + \dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq \dim X - K_X \cdot V - 1$;
- $\dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq -K_X \cdot V - 1$.

$V^1, \ldots, V^k$ famiglie non spezzanti indipendenti, Y chiuso indipendente da $V^1, \ldots, V^k$ con $\mathrm{Locus}(V^1, \ldots, V^k)_Y \neq \emptyset$

- $\dim \mathrm{Locus}(V^1, \ldots, V^k)_Y \geq \dim Y - \sum K_X \cdot V^i - k$;
- $\dim \mathrm{Locus}(V^1)_Y \geq \dim(Y \cap \mathrm{Locus}(V^1)) + \dim \mathrm{Locus}(V^1_y)$.

Fibrazioni RC

$\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$ famiglie Chow.

x e y sono rc$(\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k)$ equivalenti se $x = y$ o esiste una catena di curve in $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$ che unisce x e y, i.e. $y \in \mathrm{ChLocus}_m(\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k)_x$ per qualche m.

Teorema [Campana-Kollár] Esistono $X^0 \subset X$ e un morfismo proprio a fibre connesse $\pi : X^0 \to Z^0$ tale che

- Le fibre di π sono classi di equivalenza.
- $\forall z \in Z^0$ due punti in $\pi^{-1}(z)$ sono connessi da al più $2^{\dim X - \dim Z} - 1$ cicli in $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$

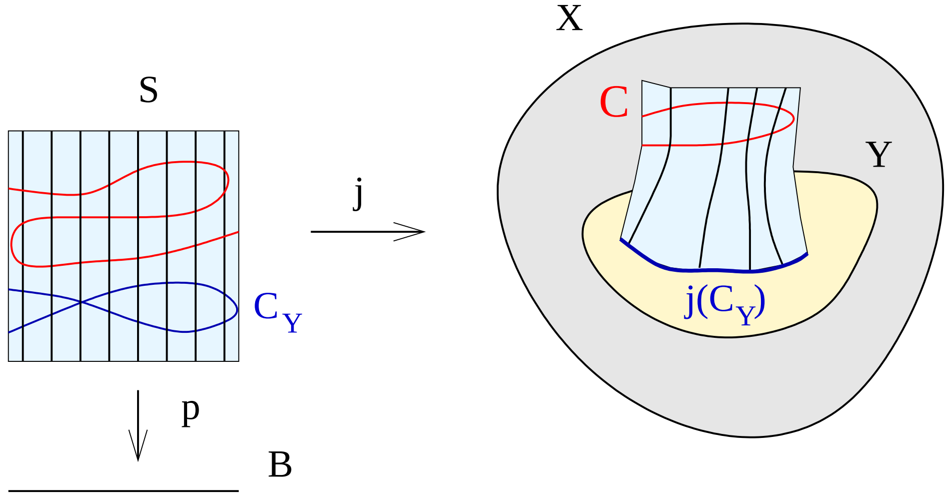
Limiti per ρ_X

Lemma $Y \subset X$ chiuso, $\mathcal{V}$ famiglia Chow, $C \subset \mathrm{Locus}(\mathcal{V})_Y$ curva.

$$C \equiv aC_Y + bC_{\mathcal{V}}$$

$a, b \in \mathbb{Q}$, $C_Y \subset Y$ e $C_{\mathcal{V}}$ ciclo di $\mathcal{V}$ che taglia Y.

Se $\mathcal{V}$ è non spezzante, $a \geq 0$



Limiti per ρ_X

Corollario $Y \subset X$ chiuso, $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$ famiglie Chow, m intero.
Ogni curva in $\mathrm{ChLocus}_m(\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k)_Y$ è numericamente equivalente a una combinazione a coefficienti razionali di una curva contenuta in Y e di componenti irriducibili di cicli in $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$.

Corollario X rc$(\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k)$ connesso; allora ogni curva in X è numericamente equivalente a una combinazione a coefficienti razionali di componenti irriducibili di cicli in$\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$.

In particolare se $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$ sono non spezzanti $\rho_X \leq k$.

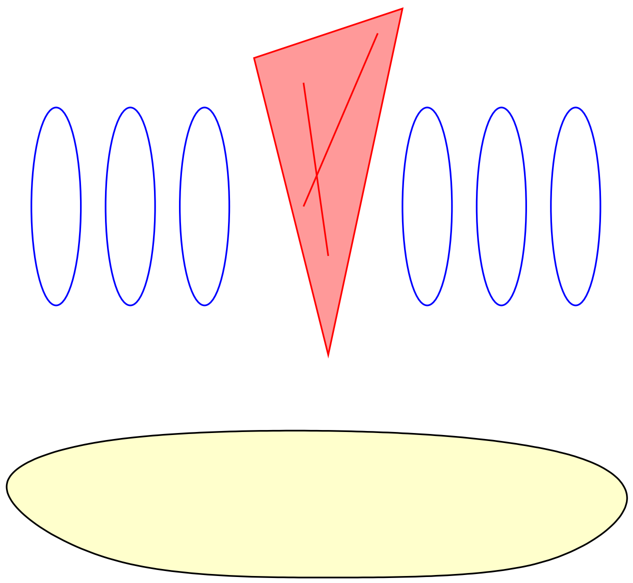
Famiglie quasi non spezzanti

Una famiglia Chow $\mathcal{V}$ si dice quasi non spezzante se le componenti irriducibili dei cicli di $\mathcal{V}$ sono numericamente proporzionali

In $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$

$$X = \{x_0^2 y_0 + x_1^2 y_1 + x_2^2 y_2 = 0\},$$

$\mathcal{V}$ famiglia che contiene la conica intersezione di X con la fibra generica della prima proiezione.



Varietà di Fano

X varietà di Fano $\Longleftrightarrow -K_X$ ampio

$n = \dim X \qquad r_X$ indice di X

$$r_X = \max\{m \in \mathbb{N} \mid -K_X = mL\}$$

n	
1	$\mathbb{P}^1$
2	del Pezzo
3	Fano, Iskovskii
	Mori, Mukai

r_X	
$n+1$	$\mathbb{P}^n$
n	$\mathbb{Q}^n$
$n-1$	del Pezzo
$n-2$	Mukai

$\boxed{\rho_X \geq 2}$

n	
$2r_X - 2$	$\mathbb{P}^{r_X} \times \mathbb{P}^{r_X}$
$2r_X - 1$	Wiśniewski
$2r_X$	Wiśniewski et al.

Congettura: $\rho_X(r_X - 1) \leq \dim X$ Vera per $n < 2r_X - 2$

Wiśniewski

Varietà di Fano

Se $\rho_X \geq 2$ l'invariante “giusto" è i_X, pseudoindice di X

$$i_X = \min\{m \in \mathbb{N} \mid -K_X \cdot C = m\}.$$

Ad esempio $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n+1}$ ha indice 1 e pseudoindice $n+1$.

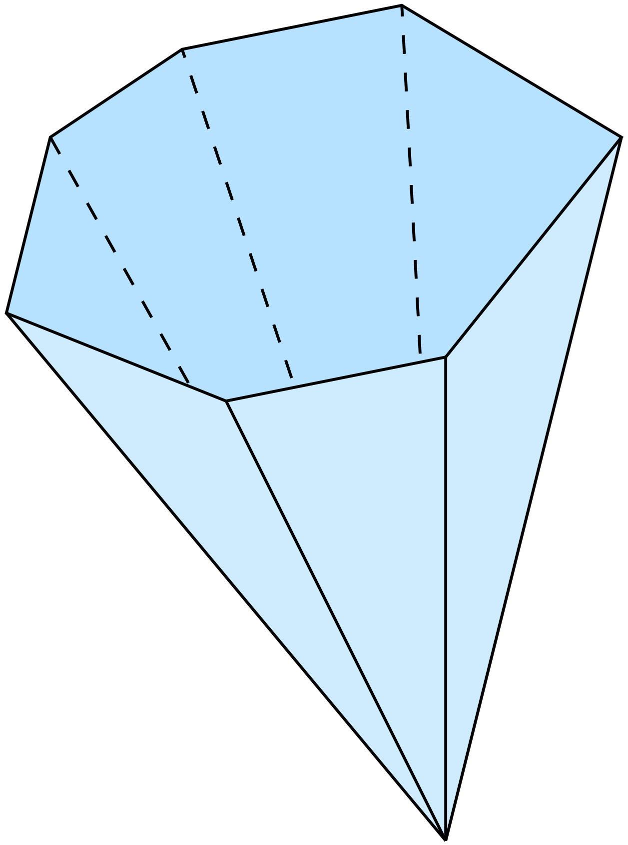
i_X	
$n+1$	$\mathbb{P}^n$
n	$?\mathbb{Q}^n?$

Congettura: $\rho_X(i_X - 1) \leq \dim X$, e $=$ sse $X \simeq (\mathbb{P}^{i_X-1})^{\rho_X}$

Varietà di Fano

Il cono delle curve di una varietà di Fano è chiuso e poliedrale, generato da un numero finito di raggi

Ogni faccia del cono corrisponde a una contrazione , i.e. a un morfismo a fibre connesse su una varietà normale



Curve razionali su varietà di Fano

Teorema [Mori] X Fano. Per ogni $x \in X$ esiste C razionale con $-K_X \cdot C \leq \dim X + 1$.

Teorema [KMM] X Fano, $\pi : X^0 \to Z^0$ morfismo suriettivo proprio, $z \in Z^0$ generico. Esiste C razionale su X con $-K_X \cdot C \leq \dim X + 1$ e t.c.

- $C \cap \pi^{-1}(z) \neq \emptyset$
- C non contenuta in $\pi^{-1}(z)$

$\{V^i \subset Ratcurves^n(X)\}$ che contengono curve razionali orizzontali di grado $\leq \dim X + 1$ sono finite $\Rightarrow$ esiste i t.c. $\mathrm{Locus}(V^i)$ domina Z^0

V di grado minimo tra queste è una famiglia minima dominante
In particolare è localmente non spezzante

Prodotti di spazi proiettivi

Teorema (Cho-Miyaoka-Sheperd Barrow, Kebekus) X liscia proiettiva è $\mathbb{P}^{\dim X}$ sse esiste V non spezzante dominante di grado $\dim X + 1$

Teorema (__) X liscia proiettiva è $\mathbb{P}^{n(1)} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n(k)}$ sse esistono $V^1, \dots, V^k$ non spezzanti, dominanti e indipendenti di gradi $n(1)+1, \dots, n(k)+1$ con $\sum n(i) = \dim X$.

Idea: $X = \mathrm{Locus}(V^{i(1)}, \dots, V^{i(k)})$ per ogni permutazione, e quindi $NE(X) = \langle [V^1], [\dots], [V^k] \rangle$.

Poi si analizzano le contrazioni delle facce di codimensione uno e si prova che vanno su spazi proiettivi.

. . .

Congettura di Mukai

Congettura: $\rho_X(i_X - 1) \leq \dim X$, e $=$ sse $X \simeq (\mathbb{P}^{i_X - 1})^{\rho_X}$

1990 Wiśniewski $i_X > \frac{n+2}{2} \Rightarrow \rho_X = 1$.

2002 Bonavero, Casagrande, Debarre, Druel

- $\dim X = 4$
- X torica e $i_X \geq \frac{\dim X + 3}{3}$
- X torica e $\dim X \leq 7$

2003 Andreatta, Chierici, ____

- X “speciale" e $i_X \geq \frac{\dim X + 3}{3}$
- $\dim X = 5$

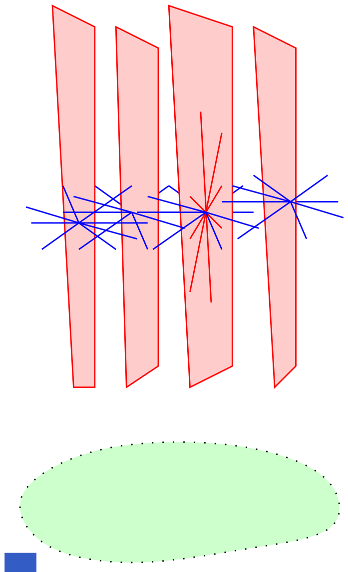
Congettura di Mukai

X Fano, $i_X \geq \frac{\dim X+3}{3}$. Se esiste V non spezzante e dominante, allora la congettura è vera per X.

$\pi : X^0 \to Z^0$ fibrazione rc$V$

Se $\dim Z^0 = 0$ allora $\rho_X = 1$.

Altrimenti esiste V' minima orizzontale dominante per π, ed è localmente non spezzante



$x \in \mathrm{Locus}(V')$, F fibra di π per x; $F \supseteq \mathrm{Locus}(V)_x$

$$\dim F \geq -K_X \cdot V - 1 \qquad \dim(\mathrm{Locus}(V'_x) \cap F) = 0$$

$$\dim X \geq \dim F + \dim \mathrm{Locus}(V'_x) \geq -K_X \cdot V - K_X \cdot V' - 2,$$

quindi $-K_X \cdot V' \leq 2i_X - 1$ e V' è non spezzante

Congettura di Mukai

$\pi' : X' \to Z'$ fibrazione rc(V, V')

Se $\dim Z' = 0$ allora $\rho_X = 2$

Altrimenti esiste V'' minima orizzontale dominante per π', ed è localmente non spezzante

$x \in \mathrm{Locus}(V'')$, F' fibra di π' per x; $F \supseteq \mathrm{Locus}(V, V')_y$

$$\dim F \geq -K_X \cdot V - K_X \cdot V' - 2 \qquad \dim(\mathrm{Locus}(V''_x) \cap F) = 0$$

$$\dim X \geq \dim F + \dim \mathrm{Locus}(V''_x) \geq -K_X \cdot V - K_X \cdot V' - K_X \cdot V'' - 3,$$

$$-K_X \cdot V = -K_X \cdot V' = -K_X \cdot V'' = i_X$$

$$\dim \mathrm{Locus}(V_x) = \dim \mathrm{Locus}(V'_x) = \dim \mathrm{Locus}(V''_x) = i_X - 1$$

Tutte le famiglie sono dominanti; si può applicare il teorema sui prodotti e concludere $X \simeq (\mathbb{P}^{i_X - 1})^3$ $\square$

Varietà di (pseudo)indice $\dim X - 3$

Classificazione di del Pezzo e Mukai

- Si prova l'esistenza di una sezione liscia nel sistema $|L|$
- Si studiano i casi di dimensione bassa (2 e 3)

Questo è molto difficile per l'indice $n - 3$

D'altra parte, se $\rho_X \geq 2$, più è alta la dimensione, più è semplice la classificazione

E' possibile una classificazione della struttura di X (cioè del suo cono delle curve) se la dimensione è almeno cinque

Teorema (Chierici, __) X Fano di pseudoindice $i_X = \dim X - 3$ e dimensione almeno 5. Allora $NE(X)$ è generato da ρ_X raggi e i possibili coni sono classificati in base al tipo di raggi

Tavola dei coni

n	ρ_X	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
5	2	F	F			
		F	D_0			
		F	D_1			
		F	D_2			
		F	S			
		D_2	D_2			
		D_2	S			
	3	F	F	F		
		F	F	S		
		F	F	D_1		
		F	F	D_2		
		F	D_2	D_2		
	4	F	F	F	F	
		F	F	F	D_2	
	5	F	F	F	F	F

n	ρ_X	R_1	R_2	R_3
6	2	F	F	
		F	D_1	
		F	D_2	
		F	S	
	3	F	F	F
7	2	F	F	
		F	D_2	
8	2	F	F	

F contrazione fibrata

D_i contrazione divisoriale su una sottovarietà di dimensione i

S contrazione piccola

Questi casi sono classificati

Varietà senza fibrazioni

Teorema (Chierici, __) Sia X una varietà di Fano di dimensione 5 e pseudoindice almeno 2.

X ha un raggio fibrato sse esiste $\mathcal{V}$ quasi non spezzante dominante

X non ha un raggio fibrato sse è lo scoppiamento di $\mathbb{P}^5$ lungo $\begin{cases} \text{Una quadrica liscia} \subset \mathbb{P}^3 \\ \text{Uno scroll cubico} \subset \mathbb{P}^4 \\ \text{Una superficie di Veronese} \end{cases}$

Scoppiamenti e varietà di Fano

Teorema (Bonavero Campana Wiśniewski) $\sigma : X \to X'$ scoppiamento in un punto e X Fano. Allora X è

- $\mathbb{P}^n$
- $\mathbb{Q}^n$
- $Bl_Y(\mathbb{P}^n)$ con Y iperpiana di dimensione $n-2$ e grado $\leq n$

Scoppiamento in un punto $\quad \Leftrightarrow \quad l(R) = n - 1$

E' facile vedere che, se $\sigma : X \to X'$ è uno scoppiamento e X Fano

$$l(R) + i_X \leq n + 1$$

Scoppiamenti e varietà di Fano

Teorema Se $l(R) + i_X \geq n$ allora X è come sopra o

- $\mathbb{P}^1 \times Bl_p(\mathbb{P}^{n-1})$.
- $\mathbb{P}^n$ scoppiato in un sottospazio lineare di dimensione $\leq \frac{n}{2} + 1$
- $\mathbb{Q}^n$ scoppiata in un sottospazio lineare di dimensione $\leq \frac{n}{2} - 1$
- $\mathbb{Q}^n$ scoppiata in una quadrica di dimensione $\leq \frac{n}{2} - 1$

Alcuni problemi aperti

- Classificare le varietà di Fano di dim 5 e indice ≥ 2 ★
- Classificare i coni di varietà di Fano di dimensione 4 ★★
- X ha un raggio fibrato $\overset{\Longrightarrow}{\underset{\Longleftarrow}{?}}$ esiste $\mathcal{V}$ quasi non spezzante dominante ★★★
- Esiste una fibrazione rc$(\mathcal{V}^1, \ldots \mathcal{V}^k)$ che non si può estendere a un morfismo? ★★★