Estensione di contrazioni da sezioni ampie

Origini

Idea: Studiare una varietà attraverso le sue sezioni iperpiane.

Due esempi:

- La teoria delle varietà polarizzate di Fujita, che chiama questa tecnica Metodo di Apollonio.

- Varietà che ammettono sezioni speciali (Sommese, Bădescu, Fujita . . .)

  "A variety is as special as any of its hyperplane sections"

Fibrati ampi e varietà speciali

X liscia di dimensione n
$\mathcal{E}$ ampio di rango r
$Z = (s)_0$, $s \in \Gamma(\mathcal{E})$ liscia di dimensione $n - r$

Z "speciale"
$\Downarrow$
X "speciale"

Lanteri - Maeda:

- Z speciale nel senso dell'aggiunzione (spazi proiettivi, quadriche, scroll, fibrazioni in quadriche)

- Z superficie non di tipo generale.

Ingredienti

Weak Lefschetz:

$$\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Pic}(Z)$$

isomorfismo per $\dim Z \geq 3$
iniettiva per $\dim Z = 2$

Proprietà di ampiezza:

$$Y \subset X \text{ con } \dim Y \geq r$$
$$\Downarrow$$
$$\dim Z \cap Y \geq \dim Y - r$$

Aggiunzione generalizzata:

Se $r \geq n-2$ allora $K_X + \det \mathcal{E}$ è nef tranne che per una lista nota di casi che vengono analizzati ad uno ad uno

Estensione di morfismi

Oss.: A posteriori, i risultati di Lanteri-Maeda dicono che, sotto opportune ipotesi, morfismi di Z si estendono ad X.

Idea: Trovare classi di morfismi $Z \to W$ che possano essere estesi a X.

Contrazione: Mappa suriettiva propria $\varphi : Z \to W$ di varietà (proiettive complesse) irriducibili normali a fibre connesse.

φ è **birazionale** o $\dim W < \dim Z$ e φ è detta **di tipo fibrato**.

$E(\varphi)$, il **luogo eccezionale** di φ: il più piccolo sottoinsieme di Z t.c. φ è un isomorfismo su $Z \backslash E(\varphi)$.

Possiamo formulare il seguente

PROBLEMA:

Le contrazioni di Z sono estendibili a contrazioni di X?

I.e. data una contrazione $\varphi : Z \to W$ esistono una contrazione $\Phi : X \to Y$ e un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\phi"'] & Z \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, "\phi_{|Z}"'] \\
Y & W \arrow[l, "j"]
\end{tikzcd}$$

con j isomorfismo sull'immagine?

Divisori ampi

Il risultato chiave di Sommese per i divisori ampi è un teorema di estensione di morfismi:

Teorema. *X varietà liscia, A divisore ampio su X, $Z \in |A|$ sezione liscia. Sia $\varphi : Z \to W$ una contrazione tale che* $\dim Z - \dim W \geq 2$.
Allora $\exists\ \Phi : X \to W$ contrazione tale che il diagramma seguente commuti:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\Phi"'] & Z \arrow[l, "i"'] \arrow[dl, "\varphi"] \\ W & \end{tikzcd}$$

Idea: Trovare un fibrato lineare L su X che si restringe a un fibrato L_Z che definisce φ, poi usare teoremi d'annullamento per sollevare sezioni di L_Z a sezioni di L e provare che $|L|$ è senza punti base.

Ci sono proprietà di estensione anche per contrazioni birazionali (Fujita):

Teorema. *X varietà liscia, A divisore ampio su X, $Z \in |A|$ sezione liscia.*
$\varphi : Z \to W$ scoppiamento di una sottovarietà liscia di codimensione ≥ 3.
Allora $\exists\ \Phi : X \to Y$ scoppiamento di una sottovarietà liscia tale che il diagramma seguente commuti:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\Phi"'] & Z \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ Y & W \arrow[l, hook', "j"'] \end{tikzcd}$$

Idea: *Trovare un divisore effettivo E su X che si restringe a E_Z, il luogo eccezionale di φ, poi usare un criterio di Castelnuovo generalizzato.*

Fibrati vettoriali ampi

Cattive notizie

Non ci sono teoremi di annullamento analoghi a quelli usati da Sommese e Fujita.

Come agire?

Prendiamo morfismi "migliori".

I morfismi "migliori" da questo punto di vista sono le **contrazioni estremali**.

Contrazioni estremali

Z liscia. $\varphi : Z \to W$ è una **contrazione estremale** *o* **Fano-Mori** *se $-K_Z$ è φ-ampio.*

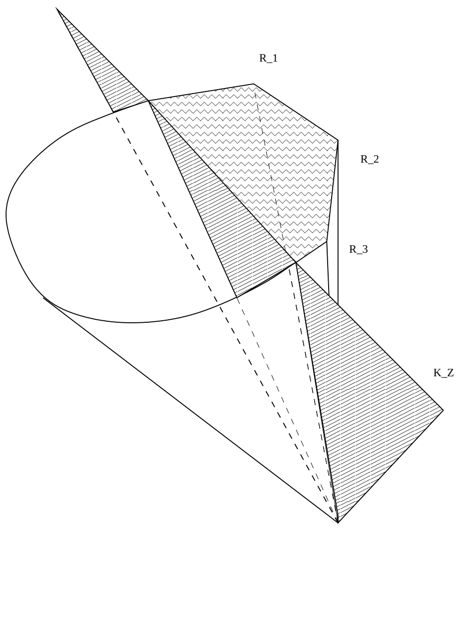
$$N_1(Z) = \frac{\{1\text{-}cicli\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R},\ N^1(Z) = \frac{\{divisori\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R}$$

$$\overline{NE(Z)} = \overline{\{\text{1 cicli effettivi}\}} \subset N_1(Z)$$

Teorema del cono: *Z liscia*

$$\overline{NE}(Z) = \overline{NE}_{K_Z \geq 0}(Z) + \sum R_j,$$

$R_j = \mathbb{R}_+[C_j]$ per delle curve razionali irriducibili ridotte $C_j \in Z_1(Z)$ e $0 < -K_Z.C_j < \dim Z + 1$.



Gli R_j sono discreti in $\{T \in N_1(Z) \mid K_Z.T < \epsilon\}$.

Gli R_j sono detti **raggi estremali** *di Z.*

$l(R_j) := -K_Z.C_j$ **lunghezza del raggio**.

Se R_Z è un raggio estremale (una faccia) Per il **Teorema di contrazione** *e il* **Teorema di razionalità**

$$\exists \quad \varphi : Z \to W$$

morfismo proiettivo su una varietà normale t.c.

1) $\forall\ C$ curva irriducibile in Z, $\varphi(C)$ è un punto $\Leftrightarrow$ $[C] \in F_X$.
2) φ ha fibre connesse.
3) φ è definita da $|m(K_X+rL)|$, con L φ-ampio.

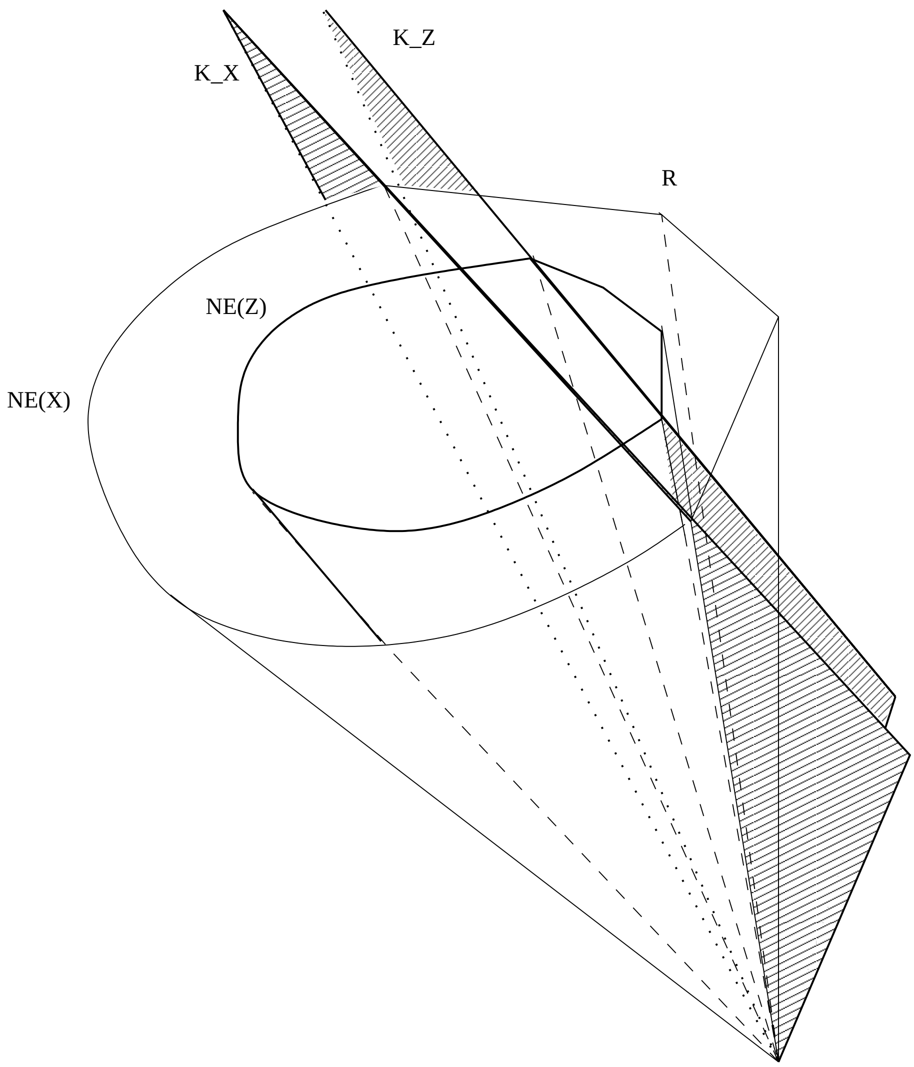
φ è una contrazione estremale e $K_X + rL$ è detto un **good supporting divisor** *di φ.*

Se F è una fibra di φ ed E è il luogo eccezionale vale la seguente disuguaglianza:

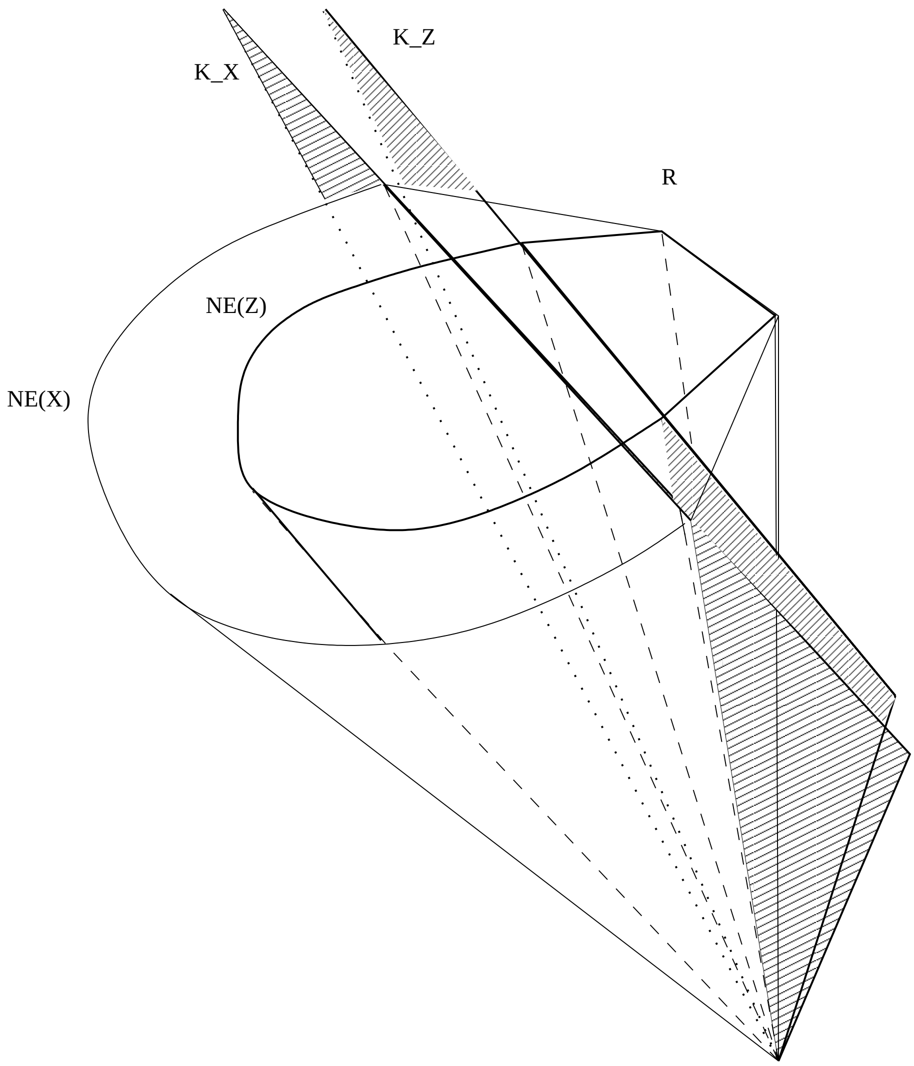
$$\dim F + \dim E \geq \dim Z + l(R_Z) - 1$$

Confronto dei coni

In virtù di Weak Lefschetz, se $\dim Z \geq 3$ *possiamo identificare* $N_1(Z)$ *con* $N_1(X)$ *e* $NE(Z)$ *con un sottoinsieme di* $NE(X)$.



Teorema *Se K_Z non è nef (e quindi anche K_X non lo è) allora c'è almeno un raggio estremale di Z che è anche un raggio estremale di X.*

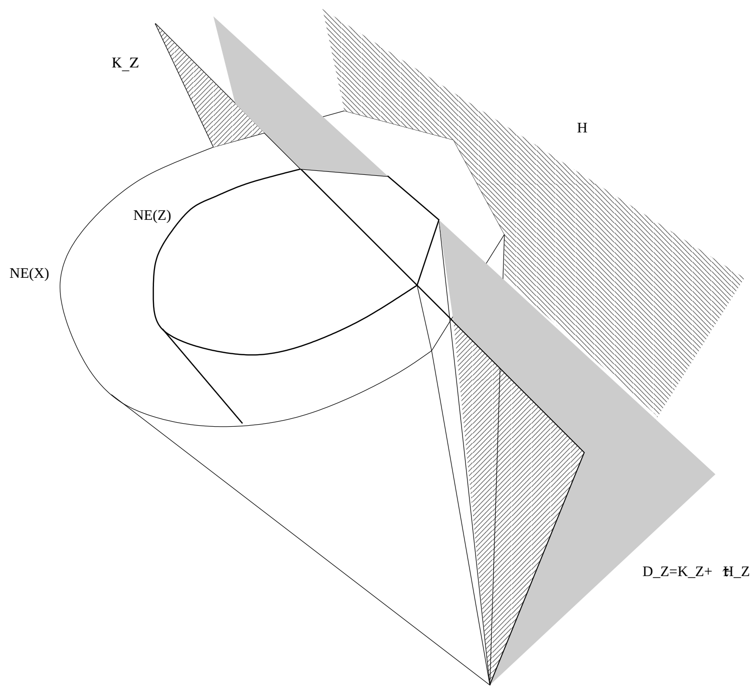


Diremo che un tale raggio è **sollevabile** *a X.*

Idea della dimostrazione

H *ampio su* X.
$\exists \tau \in \mathbb{Q}$ *s.t.* $D_Z = K_Z + \tau H_Z$ *è nef, non ampio e definisce una contrazione* $\varphi : Z \to W$.

Claim: $D = K_X + det\mathcal{E} + \tau H$ *è nef, non ampio e definisce una contrazione* $\phi : X \to Y$.

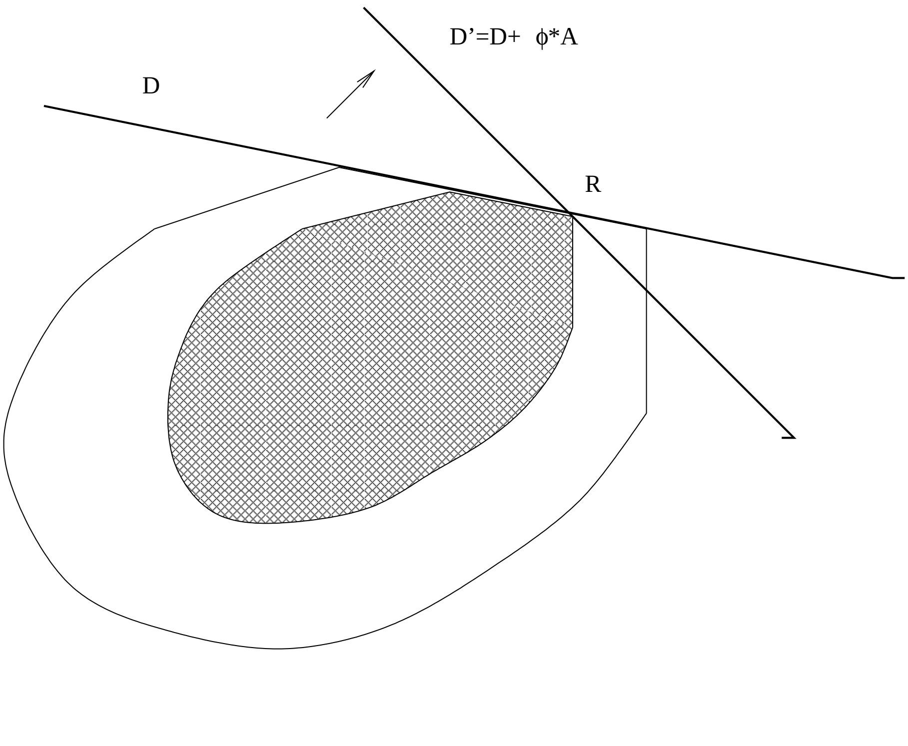


Se D *non fosse nef* $D.C < 0$ *per una curva. Anzi* $D.R < 0$ *per un raggio estremale.*

F componente di una fibra della contrazione di R, $\rho : X \to W$
F non taglia Z in una curva, poichè D_Z è nef.
Usando la disuguaglianza e le proprietà
di ampiezza di Z $\dim F = r$ per ogni F.

X è un $\mathbb{P}^r$-bundle su W, e Z è una sezione regolare; $Z \simeq W$ in contraddizione con Weak Lefschetz.

Ora muoviamo D e ripetiamo l'argomento per ogni raggio della faccia:



ATTENZIONE !!

La sollevabilità del raggio $\not\Rightarrow$ *che* $\phi_{|Z} = \varphi$.

Abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\phi"'] & Z \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, "\phi_{|Z}"'] \\
Y & W \arrow[l, "j"]
\end{tikzcd}$$

dove $j : W \to \phi_{|Z}(Z)$ *è un morfismo finito.*

Teorema 2 *Se φ è fibrata, oppure φ è lo scoppiamento di una sottovarietà liscia, allora j è un isomorfismo sull'immagine.*

Relazioni tra φ e ϕ (esempi)

Se φ è fibrata, allora anche ϕ è fibrata.

Se φ è birazionale, allora ϕ è birazionale, oppure φ ha lunghezza uno è ϕ è uno scroll.

Esempio $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, $Z \simeq \mathbb{F}_1 \in |\mathcal{O}(1,1)|$.

Se φ è uno scroll o un $\mathbb{P}-$bundle, allora anche ϕ lo è.

Se φ è un blow-up di una sottovarietà liscia di codim ≥ 3, allora anche ϕ lo è.

$\mathbb{P}$-*bundles*

Congettura *(Sommese, $r = 1$) Se Z è un $\mathbb{P}^d$-bundle su W, allora X è un $\mathbb{P}^{d+1}$ bundle su W tranne che se $Z \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-2}$.*

Per i risultati precedenti, se Z è un $\mathbb{P}$-bundle su una varietà minimale W, allora X è un $\mathbb{P}$-bundle su W $(r \geq 1)$.

Teorema *Se Z è un $\mathbb{P}^d$-bundle su una superficie S di dimensione di Kodaira non negativa allora X è un $\mathbb{P}^{r+d}$-bundle su S.*

Idea della dimostrazione

Cono delle curve di Z

Proposizione *Se Z ha un altro raggio estremale R, allora φ_R è il blow-down $\varphi_R : Z \to Z'$ di un divisore $E = p^{-1}(C)$, con C curva eccezionale di S, t.c. $E \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^d$.*
Inoltre, Z' ha una struttura di $\mathbb{P}^d$-bundle su S'.

$$\begin{tikzcd}
Z = \mathbb{P}(\mathcal{F}) \arrow[r, "\bar{\sigma}"] \arrow[d, "p"'] & Z' = \mathbb{P}(\mathcal{F}') \arrow[d, "p'"] \\
S \arrow[r, "\sigma"'] & S'
\end{tikzcd}$$

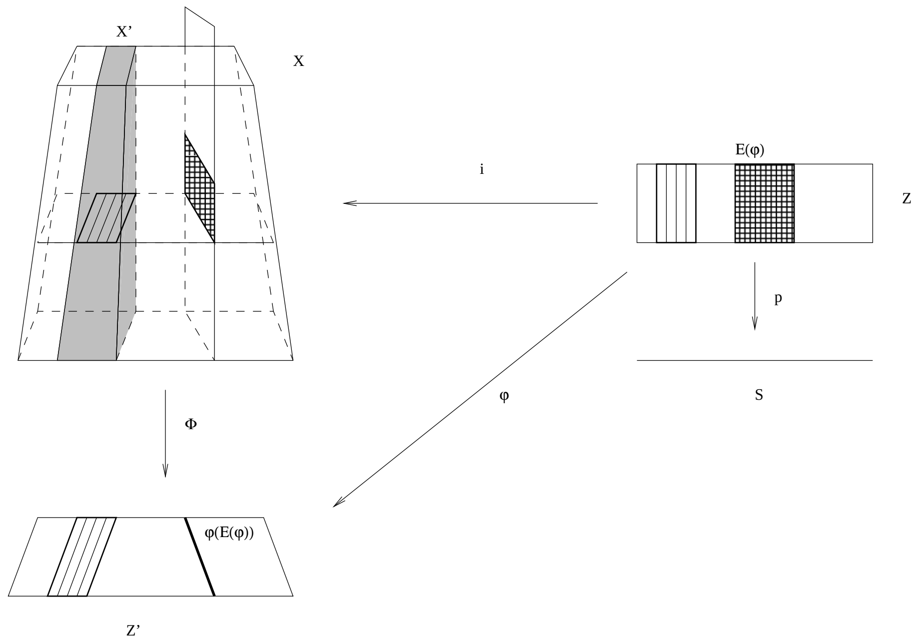
σ è il blow-down di C.

Almeno un raggio estremale di Z è sollevabile ad un raggio estremale di X e la contrazione corrispondente φ è estendibile a ϕ.

Se φ è la contrazione di $\mathbb{P}$-bundle , allora OK. Altrimenti ci sono due casi:

1) ϕ è uno scroll su Z'.
2) $\phi : X \to X_1$ è un blow-down.

Claim *Il primo caso è impossibile.*



Esiste un fibrato vettoriale ampio $\mathcal{E}_1$ su X_1 t.c.

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(E) = \Pi^* \mathcal{E}_1$$

$$(X, \mathcal{E}, Z) \dashleftarrow\dashrightarrow (X_1, \mathcal{E}_1, Z_1)$$

$$\rho(Z) \qquad\qquad \rho(Z_1) = \rho(Z) - 1$$

Ripetiamo lo stesso ragionamento.

A un certo punto troviamo una tripla $(X_k, \mathcal{E}_k, Z_k)$ t.c. la contrazione di $\mathbb{P}^d$-bundle di Z_k si estende a una contrazione di $\mathbb{P}^{r+d}$-bundle di X_k.

Inoltre $\mathcal{E}_{k|F} \simeq \oplus^r \mathcal{O}(1)$ per ogni fibra della contrazione e raggiungiamo una contraddizione con l'ampiezza di $\mathcal{E}_{k-1}$. $\square$

Problemi aperti

Non abbiamo criteri per decidere quale raggio estremale di Z (se ce n'è più di uno) è sollevabile.

Esempio*:* $\mathbb{F}_1$

Congettura: *Se un raggio ha lunghezza maggiore del rango di $\mathcal{E}$, allora si solleva.*

Esempi*:* $Bl_p(\mathbb{P}^3)$ *e* $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ *possono essere realizzati come sezioni ampie di fibrati vettoriali di rango due su* $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$ *e* $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^4$ *rispettivamente.*