Deformazione di curve e fibre di contrazioni estremali

Gianluca Occhetta

24 maggio 2000

I Contrazioni estremali

<u>**Contrazione**</u>: Mappa propria $\varphi : X \to W$ di varietà irriducibili normali a fibre connesse.

φ è **birazionale** oppure dim $W <$ dim X e φ si dice **di tipo fibrato**.

$E(\varphi)$, il **luogo eccezionale** di φ: il più piccolo sottoinsieme di X t.c. φ è un isomorfismo su $X \backslash E(\varphi)$.

Noi assumeremo sempre X liscia.

$\varphi : X \to W$ è una <u>**contrazione estremale (o di Fano-Mori)**</u> se $-K_X$ è φ-ampio; è una **contrazione crepante** se $-K_X$ è φ-banale.

φ è **elementare** se $Pic(X)/\varphi^*(Pic(W)) \simeq \mathbb{Z}$.
φ è **piccola** se codim $E(\varphi) \geq 2$.

Esempi

- *Contrazioni di tipo fibrato*

  - W liscia, $\mathcal{E}$ fibrato vettoriale, $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, $\pi : X \to W$ proiezione su W.

  - X varietà di Fano ($-K_X$ ampio), $c : X \to \{*\}$ contrazione a un punto.

- *Contrazione birazionale divisoriale*

  W varietà liscia, $Z \subset W$ sottovarietà liscia, $\sigma : X \to W$ blow-up di W lungo Z.

- *Contrazione piccola*

  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2}$, $X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{E})$; il sistema lineare $|\xi|$ definisce $f : X \to W$, che contrae $\mathbb{P}^2$ con normale $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus 2}$ (Contrazione piccola di Kawamata).

Genesi

$$N_1(X) = \frac{\{1-cicli\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R}, \ N^1(X) = \frac{\{divisori\}}{\equiv} \otimes \mathbb{R}$$

$$\overline{NE(X)} = \overline{\{\text{1-cicli effettivi}\}} \subset N_1(X)$$

Teorema del cono: X liscia (LT)

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}_{K_X \geq 0}(X) + \sum R_j,$$

$R_j = \mathbb{R}^+[C_j]$ per qualche curva razionale irriducibile ridotta $C_j \in Z_1(X)$ t. c. $K_X.C_j < 0$.
Inoltre gli R_j sono discreti in $\{Z \in N_1(X) \mid K_X.Z < \epsilon\}$.

$N_1(X)$ $\qquad$ $K_X < 0$

$K_X \geq 0$

$\overline{NE(X)}$

Gli R_j sono detti **raggi estremali** di X.

F_X faccia estremale di X

Dal **Teorema di contrazione:** e dal **Teorema di razionalità** segue

$$\exists \quad \varphi : X \to W$$

morfismo proiettivo su una varietà normale, t.c.

1. $\forall\, C$ curva irriducibile su X, $\varphi(C)$ è un punto $\Leftrightarrow$ $[C] \in F$.

2. φ ha fibre connesse.

3. φ è definita da $|m(K_X + rL)|$, con L φ-ampio e $r \geq 1$.

φ è una contrazione estremale e si dice che $K_X + rL$ è un divisore che **supporta** la contrazione φ.

II Bend and Break

Le tecniche di B&B, introdotte da Mori sono usate per

Trovare curve razionali...

$c \in C$ curva liscia $\subset X$ liscia, $g(C) > 0$. Se

$$\dim {}_{[f]}\mathrm{Hom}(C, X, f_{|c}) \geq 1$$

(i.e. C ha una famiglia non banale di deformazioni con un punto fisso) allora esistono Z 1-ciclo razionale e $f' : C \to X$ t.c.

$$f_*(C) \equiv f'_*(C) + Z$$

(i.e. tra le deformazioni c'e' una curva riducibile, con almeno una componente razionale).

...di grado basso.

Γ curva razionale $\subset X$ liscia. Se

$$\dim {}_{[f]}\mathrm{Hom}(\Gamma, X, f_{|0,\infty}) \geq 1$$

(i.e. C ha una famiglia non banale di deformazioni con due punti fissi) allora tra le deformazioni c'è una curva riducibile.

L'esistenza di deformazioni è legata al grado anticanonico delle curve: se $f : C \to X$ é una curva

$$\dim {}_{[f]}\mathrm{Hom}(C, X) \geq -K_X.C + n\chi(\mathcal{O}_C)$$

$B \subset C$ sottoschema chiuso finito, $g : B \to X$

$$\dim {}_{[f]}\mathrm{Hom}(C, X, g) \geq \chi(C, f^*T_X \otimes I_B).$$

Risultati classici

Mori:

Teorema *Sia X una varietà di Fano liscia. Allora, per ogni punto $x \in X$ passa una curva razionale Γ_x t.c.*

$$-K_X.\Gamma_x \leq \dim X + 1.$$

Kollàr, Miyaoka e Mori:

Teorema *Sia X una varietà di Fano liscia, $U \subset X$ aperto non vuoto, Z varietà quasi proiettiva liscia di dimensione positiva, $\pi : U \to Z$ suriettivo proprio, $z \in Z$ punto generico.*
Allora esiste una curva razionale $C \subset X$ non contratta da π t.c. $C \cap \pi^{-1}(z) \neq \emptyset$.

Per contrazioni estremali da varietà lisce vale un analogo del primo teorema: per il punto generico di ogni fibra passa una curva razionale di grado $\leq \dim X + 1$.

Si proverà ora un analogo del secondo teorema per contrazioni estremali

Teorema 1 $\varphi : X \to W$ *contrazione estremale,* $F = \varphi^{-1}(w)$ *fibra di* φ*;* $U \subset F$*,* Z*,* π *e* z *come sopra.*
Allora esiste una curva razionale $C \subset F$ *non contratta da* π *t.c.* $C \cap \pi^{-1}(z) \neq \emptyset$*.*

Idea della dimostrazione

Sono fondamentali le seguenti osservazioni:

- $c \in C \subset F$. Le deformazioni in X di C con punto fisso c sono contenute in $F \Rightarrow$ Posso usare le deformazioni in X liscia.

- $-(K_X)_{|F}$ è ampio.

Sia ora C una curva contenuta in F non contratta da π che taglia $\pi^{-1}(z)$.

Passo 1: Si sostituisce $f : C \to F$ con $f' : C \to F$ tale che f' non abbia deformazioni relative su Z.

Passo 2: A meno di passare in caratteristica positiva e di comporre $f' : C \to F$ con un numero sufficiente di morfismi di Frobenius

$$\dim \mathrm{Hom}_{[f]}(C, X, c) \geq \chi(C, f^*T_X \otimes I_c) \geq 1$$

$\Rightarrow C$ si spezza con una componente razionale.

Passo 3: Ritorno alla caratteristica zero con tecniche standard.

Famiglie non spezzanti
(l'altra faccia del B&B)

$$\textbf{Hom}(\mathbb{P}^1, \mathbf{X}) = \{\text{morfismi } \mathbb{P}^1 \to X\}$$

$$\textbf{Hom}(\mathbb{P}^1, \mathbf{X}; \mathbf{0} \to \mathbf{x}) =$$

$$= \{\text{morfismi che mandano } 0 \in \mathbb{P}^1 \text{ in } x \in X\}$$

$V \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X)$ Famiglia di morfismi

Famiglia di curve razionali

$$u : \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1, X) \to \mathrm{Chow(X)}$$

V è chiusa per $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ se $u^{-1}(u(V)) = V$

Una tale V è una *famiglia non spezzante* se $u(V) = T$ è chiuso.

Osservazione 1 *Un ciclo è riducibile se e solo se corrisponde ad un punto* $t \in \overline{T} \setminus T$.

$$F : \mathbb{P}^1 \times \text{Hom}(\mathbb{P}^1, X) \to X \quad \text{valutazione}$$

Luogo della famiglia:

$$\boxed{\mathbf{Lc(V)} = F(\mathbb{P}^1 \times V)}$$

Luogo delle curve di V passanti per x:

$$\boxed{\mathbf{Lc(V, 0 \to x)} = F(\mathbb{P}^1 \times (V \cap \text{Hom}(\mathbb{P}^1, X; 0 \to x))}$$

Poiché le curve non si spezzano posso stimare in modo preciso la dimensione della famiglia

Proposizione 1 *: V famiglia non spezzante*

$$\textit{dim } V = \textit{dim } Lc(V) + \textit{dim } Lc(V, 0 \to x) + 1$$

$$\textit{dim } V \geq \textit{dim } X + \textit{deg}_{-K}(V)$$

Esempio Le deformazioni di una curva razionale C t.c. $\exists$ L ampio t.c. $L.C = 1$.

Esempio φ contrazione estremale di X, S' componente irriducibile di una fibra.

$$l := min\{-K_X \cdot C : C \text{ curva razionale in } S'\}.$$

Una curva razionale che realizza la lunghezza si dice **<u>curva estremale</u>**; la famiglia di deformazioni di una curva estremale è non spezzante, e vale la disuguaglianza

Proposizione *(Ionescu - Wiśniewski)*

$$\textit{dim } E(\varphi) + \textit{dim } S' \geq \textit{dim } X + l(R) - 1.$$

III Fibre di contrazioni

$\varphi : X \to W$ contrazione elementare supportata da $K_X + rL$; la disuguaglianza si riscrive

$$\text{dim } S' \geq r + \text{codim}(E(\varphi)) - 1 \qquad (*)$$

L'uguaglianza è stata studiato da Andreatta, Ballico e Wiśniewski.

Teorema $\varphi : X \to W$ ed S' come sopra, e in (*) valga l'uguale, S normalizzazione di S', $s = \text{dim } S$. Allora

$$(S, L) \simeq (\mathbb{P}^s, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(1)).$$

Si studierà ora il caso successivo

<u>**Teorema**</u> **2** $\varphi : X \to W$ *ed* S'*come sopra,*

$$\textit{dim } S' = r + \textit{codim } (E(\varphi))$$

S *normalizzazione di* S', $s = \textit{dim } S$. *Allora*

$$\Delta(S, L) = 0.$$

Idea della dimostrazione

Passo 1: $\exists$ una famiglia non spezzante V, t.c.

$$\mathrm{Lc}(V) = E$$

e, per un punto generico $x \in S'$

$$\dim \mathrm{Lc}(V, 0 \to x) \geq s - 1.$$

Passo 2: $\Phi : M \to S$ desingolarizzazione di S, e $L_M = \Phi^* L$; si costruisce una famiglia di curve razionali V_M su M, t.c. $\overline{\mathrm{Lc}(V_M)} = M$ e $\dim \mathrm{Lc}(V_M, 0 \to m) \geq s - 1$.

Passo 3: Annullamenti

$\nu : \mathbb{P}^1 \to C \subset M$ normalizzazione di una curva generica della famiglia V_M

$$\nu^*(TM) \simeq \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$$

$$a_1 \geq 2, \quad a_i \geq 1 \quad i = 2, \dots s-1, \quad a_s \geq 0$$

$$(K_M + tL_M).C < 0 \qquad \text{se } t < s.$$

La famiglia copre un sottoinsieme denso di M

$$h^s(M, -tL_M) = h^0(M, K_M + tL_M) = 0 \quad t < s$$

e

$$h^i(M, \mathcal{O}_M) \simeq h^0(M, \wedge^i TM^*) = 0 \qquad \text{per } i \geq 2$$

Passo 4: $h^1(M, \mathcal{O}_M) = 0$

Se $h^1(M, \mathcal{O}_M) \neq 0$ si considera $\alpha : M \to Alb(M)$, la mappa di Albanese di M; poiché $\overline{\mathrm{Lc}(V)} = M$ e dim Lc$(V, 0 \to x) = s - 1$, allora $\alpha(M) \subset Alb(M)$ è una curva di genere positivo, B.
$\alpha : M \to B$ è un fibrato proiettivo.
$S^0 \subset S'$ sottoinsieme aperto dei punti lisci di S'; si ottiene un morfismo $S^0 \to B$, e quindi B dev'essere razionale per il Teorema 1.
Assurdo.

Passo 5:

K-V: $h^i(M, -tL_M) = 0$ per $i < s$, $t > 0$

$\chi(M, tL_M)$, polinomio di Hilbert

$$\boxed{\chi(M, tL_M) = \frac{d}{s!}\left(\prod_{k=1}^{s-1}(t+k)\right)\left(t+\frac{s}{d}\right)}$$

e quindi

$$\Delta(M, L_M) = 0$$

IV Contrazioni piccole

Una prima applicazione del Teorema 2 è data dal seguente

<u>Corollario</u> 1 *$\varphi : X \to W$ contrazione piccola di X liscia di dimensione 5, t.c. il suo luogo eccezionale $E(\varphi)$ sia unione disgiunta delle sue componenti irriducibili normali E_i. Allora*

- *$\varphi(E_i)$ è un punto e E_i è $\mathbb{P}^3$, $\mathbb{Q}^3$ (anche singolare) o un cono generalizzato su una curva razionale di grado 3.*

- *$\varphi(E_i)$ è una curva e E_i è un $\mathbb{P}^2$-bundle.*

Tale risultato è il punto di partenza per uno studio approfondito delle contrazioni piccole da varietà lisce di dimensione 5. Ricordiamo che:

- Se dim $X = 3$ non esistono contrazioni piccole.

- Se dim $X = 4$ esiste solo la contrazione piccola di Kawamata.

Studio locale

$\varphi : X \to W$ contrazione estremale, F fibra, $Z \subset W$ aperto affine t.c. $\varphi(F) \in Z$.
Posto $X = \varphi^{-1}(Z)$ chiameremo $\varphi : X \to Z$ una **contrazione locale** attorno ad F.

<u>Teorema</u> 3 *X varietà liscia di dimensione 5, $\varphi : X \to Z$ contrazione piccola locale attorno a F liscia, ($-K_X$ relativamente generato). Allora $(F, N_{F/X})$ è*

F	$N_{F/X}$
$\mathbb{P}^3$	$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$
	$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$
$\mathbb{Q}^3$	$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}^3}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^3}(-1)$
$\mathbb{P}^2$	$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)^{\oplus 2}$

Inoltre l'intorno formale di F in X è unicamente determinato ed è isomorfo all'intorno formale della sezione zero nello spazio totale del fibrato $N^*_{F/X}$ ed esiste il flip di φ.

Idea della dimostrazione

Passo 1: $N^*_{F/X}$ è numericamente effettivo.

Tagliando X con due sezioni generiche in $|-K_X|$ si ottiene una contrazione (non estremale !!) di una curva in una 3-varietà; si prova che il fibrato conormale di tale curva è generato e che le sezioni si sollevano.

Passo 2: $N^*_{F/X}$ è un fibrato di Fano.

Passo 3: Un'analisi dei fibrati di Fano su $\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^3$ e $\mathbb{Q}^3$ (classificati da Szurek e Wiśniewski) permette di eliminare tutti i casi che non compaiono nell'enunciato del teorema.

Passo 4: Il flip (un esempio)

$\beta : \hat{X} \to X$ scoppiamento di X lungo F; esiste $\widehat{\varphi} : \hat{X} \to \widehat{W}$ contrazione estremale t.c.

$$
\begin{tikzcd}
 & \hat{X} \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\widehat{\varphi}"] & \\
X \arrow[rr, dashed, "tr_{\varphi}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \widehat{W} \arrow[dl, "\varphi^{+}"] \\
 & W &
\end{tikzcd}
$$

Se $(F, N^*_{F/X}) = (\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^{\oplus 2})$ allora $\widehat{\varphi}$ è il blow-down di un divisore ad una curva liscia ed il flip è realizzato.

Esempi

a) Fibrati proiettivi

F' liscia, $\mathcal{E}$ nef t.c. $-K_{F'} - det\mathcal{E}$ è ampio.

$$X := \mathbb{P}_{F'}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O})$$

F sezione di $\pi : X \to F'$ determinata da

$$\mathcal{E} \oplus \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0.$$

$$N^*_{F/X} = \mathcal{E}$$

ξ nef e $\xi - K_{\mathbb{P}(\mathcal{E}\oplus\mathcal{O})}$ ampio $\Rightarrow |m\xi|$ è senza punti base e definisce una contrazione $\varphi : X \to W$.

$\mathcal{E}$ ampio $\Rightarrow \varphi$ è la contrazione di F' a un punto.

Consideriamo come $(F', \mathcal{E})$

F'	$\mathcal{E}$
$\mathbb{P}^3$	$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$
	$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$
$\mathbb{Q}^3$	$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}^3}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^3}(1)$
$\mathbb{P}^2$	$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2}$

b) *Dal divisoriale al piccolo*

$\hat{Y}$ varietà liscia di dimensione cinque ottenuta come $\beta : \hat{Y} \to Y$ blow up di C curva, f fibra t.c.

$E(\beta)$	$N_{f/\hat{Y}}$
$\mathbb{P}^3$-bundle	$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$
	$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)$
$\mathbb{Q}$-bundle	$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^3}(-1)$

$W \subset Y$ threefold che taglia C transversalmente

$$W \cap C = \{p_1, p_2, \dots p_m\}$$

t.c. $\widehat{W}$, trasformata stretta di W sia liscia.

$\sigma : X \to \hat{Y}$ blow up di $\hat{Y}$ lungo $\widehat{W}$.

$$F_1, \dots, F_m$$

trasformate strette di

$$\beta^{-1}(p_1), \dots, \beta^{-1}(p_m)$$

X

F_1

F_2

$F_1, \ldots, F_m$ sono rispettivamente

F_i	$N_{F_i/X}$
$\mathbb{P}^3$	$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$
	$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$
$\mathbb{Q}^3$	$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}^3}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{Q}^3}(-1)$

e la loro contrazione è la contrazione piccola che stiamo cercando.

Lavori in corso

a) Relativa generazione

Congettura-Teorema $\varphi : X \to W$ *contrazione locale piccola di una varietà liscia di dimensione 5 attorno a F liscia. Allora $-K_X$ è relativamente generato.*

Idea della dimostrazione

Passo 1: Provare che la generica sezione in $|-K_X|$ è liscia e non contiene F, passare quindi ad una varietà X' di dimensione 4 con una contrazione crepante e provare lo stesso risultato, giungendo così a una varietà di dimensione 3 con una contrazione (non estremale !!) piccola di una curva.

Passo 2: Studiare le possibili contrazioni ottenute e, attraverso un'opportuna serie di scoppiamenti, riportarsi a situazioni note.

b) Varietà di dimensione alta

Problema

Studiare le contrazioni locali piccole di varietà di dimensione n, supportate da $K_X + (n-4)L$, attorno ad una fibra liscia F.

Metodo

Provare l'esistenza di sezioni buone in $|L|$, tagliare X con tali sezioni e ridursi al caso delle varietà di dimensione 5 (metodo di Apollonio).