FOGLIO 5 - Diagonalizzazione di operatori lineari

Esercizio 1. Siano dati i seguenti operatori lineari

(1) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito come

$$f_1(x, y, z) = \left(x,\ x - \frac{1}{2}z,\ y\right);$$

(2) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla matrice

$$M_{\mathcal{C}}(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

(3) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito sulla base canonica di $\mathbb{R}^3$ come

$$f_3(e_1) = (5, 1, 3) \qquad f_3(e_2) = (2, 6, -3) \qquad f_3(e_3) = (-2, -5, 4);$$

(4) $f_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito come

$$f_4(x, y, z, w) = (2x - 2z,\ -x + 2y + z + w,\ z,\ x - 2z + w);$$

(5) $f_5 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalla matrice

$$M_{\mathcal{C}}(f_5) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{pmatrix};$$

(6) $f_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla matrice

$$M_{\mathcal{C}}(f_6) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

(7) $f_7 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito sulla base canonica di $\mathbb{R}^3$ come

$$f_7(e_1) = (2, 0, 0) \qquad f_7(e_2) = (0, -2, 2) \qquad f_7(e_3) = (0, -6, 5);$$

(8) $f_8 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito come $f_8(x, y) = (2x + 2y, x + 3y)$;

(9) $f_9 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito dalla matrice

$$M_{\mathcal{C}}(f_9) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

(10) $f_{10} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito come

$$f_{10}(x,y,z) = (x - 3y + 3z,\ 3x - 5y + 3z,\ 6x - 6y + 4z);$$

(11) $f_{11} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito come

$$f_{11}(x,y,z) = (x,\ y + 3z,\ x + y - z);$$

(12) $f_{12} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito sulla base canonica di $\mathbb{R}^4$ come

$$\begin{array}{ll} f_{12}(e_1) = (1,0,0,0) & f_{12}(e_2) = (2,1,-1,1) \\ f_{12}(e_3) = (2,0,0,0) & f_{12}(e_4) = (4,0,-2,2); \end{array}$$

Per ogni endomorfismo f_i, determinare se

- f_i è iniettiva. Se non lo è, determinare il nucleo di f_i.
- f_i è suriettiva. Se non lo è, determinare l'immagine di f_i.
- f_i è diagonalizzabile. Se lo è, determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori di f_i e la matrice $M_{\mathcal{B}}(f_i)$.

Esercizio 2. Siano dati gli operatori lineari $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ($k \in \mathbb{R}$) definiti dalle matrici

$$M_{\mathcal{C}}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M_{\mathcal{C}}(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{C}}(f_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{\mathcal{C}}(f_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $f_5 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ($k \in \mathbb{R}$) con matrice associata

$$M_{\mathcal{C}}(f_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k-3 & 2-k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2-k & k & 0 & k+2 \end{pmatrix};$$

Per ogni endomorfismo f_i, determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ se

- f_i è iniettiva. Se non lo è, determinare il nucleo di f_i.
- f_i è suriettiva. Se non lo è, determinare l'immagine di f_i.
- f_i è diagonalizzabile. Se lo è, determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori di f_i e la matrice $M_{\mathcal{B}}(f_i)$.

Esercizio 3. Siano dati i seguenti operatori lineari:

1. $g_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla matrice
$$M_{\mathcal{C}}(g_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$
2. $g_2 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ definito dalla matrice
$$M_{\mathcal{C}}(g_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$
3. $g_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalla matrice (al variare di $h \in \mathbb{R}$)
$$M_{\mathcal{C}}(g_3) = \begin{pmatrix} h & h & h \\ h & h & h \\ h & h & h \end{pmatrix};$$
4. $g_4 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ definito dalla matrice
$$M_{\mathcal{C}}(g_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$
5. $g_5 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ definito dalla matrice
$$M_{\mathcal{C}}(g_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

6. $g_6 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalla matrice (al variare di $k \in \mathbb{R}$)

$$M_{\mathcal{C}}(g_6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ k & k & k & k \end{pmatrix}.$$

Per ogni endomorfismo g_i, determinare

- una base del nucleo ed una base dell'immagine;
- se g_i è diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori di g_i e la matrice $M_{\mathcal{B}}(g_i)$.