FOGLIO 4 - Applicazioni lineari

Esercizio 1. Si risolvano i seguenti sistemi lineari al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x - y + z + 2w = k \\ x - z + w = k - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} kx + y - z = 2 \\ x + y - kw = k \end{cases}$$

Esercizio 2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ trovare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & k \\ 6 & 6 & 3 \\ 2 & k & 1 \end{pmatrix}$$

e calcolare l'inversa per $k = 0$.

Esercizio 3. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -\sqrt{21} & \pi \\ 0 & 2 & -99 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Si dica se le seguenti applicazioni sono lineari:

- $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T_1(x, y, z) = (x + 3y,\ z - y,\ 4z)$
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T_2(x, y) = (x - y,\ x + y + 1,\ 0)$
- $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T_3(x, y, z) = (x^2,\ y,\ 2z)$
- $T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T_4(x, y, z) = (2x - y,\ \sin x)$
- $T_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T_5(x, y) = (x^2 + y,\ x - y)$
- $T_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definita da $T_6(x, y) = (\log_e(y + 1),\ \sin x,\ e^y - 1,\ 0)$

Esercizio 5. Stabilire se esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nei seguenti casi

- $T(1, 2) = (3, 0), \quad T(2, 7) = (4, 5), \quad T(1, 5) = (1, 4)$
- $T(-2, 1) = (0, 3), \quad T(-4, 2) = (0, 5), \quad T(-1, 0) = (-1, 1)$
- $T(1, 1) = (1, 2), \quad T(0, 2) = (4, 4)$

Esercizio 6. Stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ esiste un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$T(2,3) = (1,1), \qquad T(2,4) = (-1,k), \qquad T(0,1) = (-2,-1)$$

Esercizio 7. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$T(x,y) = (x+y,\ 2x,\ x-y).$$

1. Verificare che T è lineare.
2. Determinare nucleo e immagine di T.
3. Determinare $T(1,2)$ usando la definizione.

Esercizio 8. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbb{R}^2$ nel seguente modo:

$$T(e_1) = (1,2,1), \qquad T(e_2) = (4,0,1).$$

1. Esplicitare $T(x,y)$.
2. Stabilire se $(0,0,0)$, $(3,4,1)$ e $(3,-2,0)$ appartengono a $\mathrm{Im}\,(T)$.

Esercizio 9. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ la funzione lineare definita da

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_2, x_2 + 3x_3, -2x_1)$$

(a) Trovare una base del nucleo $\ker(T)$ e una base dell'immagine $\mathrm{Im}\,(T)$.

(b) Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.

(c) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v_k = (k, 2, 1-k, 4, -2)$ appartiene all'immagine di T?

Esercizio 10. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_2 + 3x_3, -2x_3 + x_4, 0, x_1 - x_2 + x_4)$$

(a) Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.

(b) Trovare una base del nucleo $\ker(T)$ e una base dell'immagine $\mathrm{Im}\,(T)$.

Esercizio 11. Sia $T \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che

$$T(x,y,z) = (x-y, 2x-3y)$$

a) Dire se T è iniettiva e/o suriettiva.

b) Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T.

Esercizio 12. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3)$$

(a) Determinare il nucleo e l'immagine di T.

(b) Stabilire se T è iniettiva. Trovare, al variare del parametro reale k, tutti i vettori v tali che $T(v) = (3, 3, k)$.

Esercizio 13. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + z - 2t, 2x + 4y + 2z + 4t, 4x + 8y + 4z, -t).$$

- Calcolare la dimensione del nucleo di f e dell'immagine di f.
- Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai seguenti tre vettori

  $$(-3, 1, 1, 0), (0, 1, -2, 0), (-3, -1, 5, 0).$$

  Verificare che $W \subseteq \ker f$; vale l'uguaglianza?

Esercizio 14. Sia T la funzione lineare da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ con matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche.

(a) Determinare basi dell'immagine $\mathrm{Im}\,(T)$ e del nucleo $\ker(T)$.

(b) Stabilire per quale valore di k il vettore $v_k = (k, k, k)$ appartiene all'immagine di T.

Esercizio 15. Sia $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $R(v) = A \cdot v$ con

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare nucleo e immagine di R.
2. Stabilire se $(-3, 2, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im}\,(R)$.

Esercizio 16. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 2z + t \\ x + 2y + 4z + t \\ 2x + 2y + 4z + 3t \\ -x - 2y + (k-4)z + 2t \end{pmatrix}$$

dove $k \in \mathbb{R}$ un parametro reale.

1. Discutere l'iniettività e suriettività di T al variare di $k \in \mathbb{R}$.

2. Determinare una base degli spazi vettoriali $\mathrm{Im}\,(T)$ e $\ker(T)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 17. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T(x, y, z) = (2x + y, x + y, y + kz)$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

(a) Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.

(b) Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\mathrm{Im}\,(T) \subseteq \mathbb{R}^3$ al variare del parametro k.

(c) Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\ker(T) \subseteq \mathbb{R}^3$ al variare del parametro k.

(d) Stabilire se il vettore $v = (3, -1, -5)$ appartiene a $\mathrm{Im}\,(T)$ al variare del parametro k. In caso positivo esprimere v come combinazione lineare degli elementi della base di $\mathrm{Im}\,(T)$ trovata.

Esercizio 18. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T(x, y, z) = (x + y, kx + y + z, kx + y + kz)$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

(a) Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.

(b) Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\mathrm{Im}\,(T)$ è $\mathbb{R}^3$ al variare del parametro k.

(c) Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\ker(T)$ è $\mathbb{R}$ al variare del parametro k.

(d) Stabilire se il vettore $v = (0, 1, -1)$ appartiene a $\mathrm{Im}\,(T)$ al variare del parametro k. In caso positivo esprimere v come combinazione lineare degli elementi della base di $\mathrm{Im}\,(T)$ trovata.

Esercizio 19. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T(x, y, z) = (kx + 4y, x + ky, y)$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro reale. Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva al variare del parametro k.

Esercizio 20. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2kx_1 - x_2, x_2 + kx_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_1)$$

(a) Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T al variare del parametro reale k.

(b) Stabilire per quali valori di k il vettore $v = (3, 3, 1, 0)$ appartiene all'immagine di T.

Esercizio 21. Sia $S\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$S(x, y, z, w) = (-x - y + z + w, -x + 2y - z, -x + y + 3z - 3w)$$

1. Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.
2. Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\mathrm{Im}\,(S)$.
3. Determinare la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\ker(S)$.

Esercizio 22. Trovare, se possibile, le matrici associate alle applicazioni lineari $S \circ T$, $T \circ S$, $R \circ T$, $T \circ R$ e $S \circ S$ con R, S e T come negli esercizi 15, 20 e 21.

Esercizio 23. Sia $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$T(x, y, z, w) = (x - 2y + 3z, x - y + (k+3)z + 2w, 2x - 3y + (k+6)z + (k+1)w)$$

dove k è un parametro reale. Stabilire se esistono valori di k per cui T è iniettiva e/o suriettiva.

Esercizio 24. Sia k un parametro reale e sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1, x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4, -kx_1 + x_3, x_3 + kx_4)$$

1. Determinare basi del nucleo e dell'immagine di T al variare del parametro k.

2. Si dica se T è iniettivo e/o suriettivo.

Esercizio 25. Sia $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare

$$T(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + 2ax_2 + x_3, bx_1 + 2bx_2 + x_3)$$

- Si determinino gli eventuali valori reali di a e b per i quali T é suriettiva.
- Si trovi una base del nucleo di T al variare di a e b.

Esercizio 26. Sia $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da $T(x) = Ax$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Stabilire se T è iniettiva e/o suriettiva.
- Trovare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di T.