FOGLIO 2 - Spazi vettoriali

Esercizio 1. Verificare se i seguenti sottoinsiemi sono dei sottospazi:

(a) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$ in $\mathbb{R}^3$;

(b) $S_2 = \{(a, a - b + 1, b - 1) : a, b \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^3$;

(c) $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2. Verificare se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono dei sottospazi:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, y + z = 0\} \\ W_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 2\}, \\ W_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Esercizio 3. (a) Stabilire se l'insieme $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$.

(b) Si dica se l'insieme $T := \{(3a, a + 2b, a - b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Dire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi:

(a) $\{(u, u^2, u + v) : u, v \in \mathbb{R}\}$;

(b) $\{(t, 2t + 1, t^3 - t) : t \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

(d) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$;

(e) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{1\}$.

Esercizio 5. I vettori $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (2, 1, 1)$, $v_4 = (0, 1, 0)$ di $\mathbb{R}^3$:

(a) generano $\mathbb{R}^3$?

(b) sono lineramente indipendenti?

(c) formano una base di $\mathbb{R}^3$? Se no, calcolarne una.

Esercizio 6. Determinare per quali valori di h sono linearmente dipendenti i tre vettori $u = (1, 0, -h)$, $v = (2, 1, -1)$ e $w = (h, 1, -1)$.

Esercizio 7. Sono dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1,2,3), \qquad v_2 = (-1,1,1), \qquad v_3 = (0,3,k),$$

$$v_4 = (-1,k,5), \qquad v_5 = (-1,10,13).$$

Si trovi una base di $\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$ al variare di k.

Esercizio 8. Sia $W = \mathcal{L}(v_1,v_2,v_3,v_4)$, con

$$v_1 = (1,1,-1,1), \qquad v_2 = (1,2,1,3),$$

$$v_3 = (2,1,-1,2), \qquad v_4 = (-3,1,-1,-3)\,.$$

Trovare una base di W ed estenderla a base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 9. Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = (0,1,2,1), \quad v_2 = (1,1,-1,0), \quad v_3 = (2,3,0,1)\,.$$

Si trovi una base di W e la si completi a base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 10. Siano $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^4$. Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa, giustificando la risposta.

(a) se w_1, w_2, w_3 sono linearmente indipendenti, esiste una base di $\mathbb{R}^4$ che li contiene;

(b) esiste una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene w_1;

(c) se $\{w_1, w_2\}$ è un insieme libero, allora $\{w_1 + w_3, w_2, w_3\}$ è ancora libero per ogni $w_3 \in \mathbb{R}^4$;

(d) la dimensione d di $\mathcal{L}(w_1,w_2,w_3)$ soddisfa $0 \leq d \leq 3$.

Esercizio 11. In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $S = \mathcal{L}(v_1,v_2,v_3,v_4)$ dove

$$v_1 = (1,0,1,1), \quad v_2 = (0,1,-1,2), \quad v_3 = (2,1,1,4), \quad v_4 = (1,2,-1,5).$$

Si trovi una base di S e si calcolino le componenti di $u = (3,-2,5,-1)$ rispetto a tale base. Stabilire se $w = (1,1,1,1)$ appartiene ad S oppure no.

Esercizio 12. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i seguenti sottoinsiemi:

$$V = \{(x,y,z) : x + y - z = 0\}$$

$$W = \{(x,y,z) : x + y + z = 0\}$$

$T = \{(x, y, z) : x + y = 0, x + z = 0\}$

(a) Verificare che V, W, T sono sottospazi.

(b) Determinare equazioni cartesiane di $V \cap W$.

(c) Determinare equazioni parametriche di $V + W$.

(d) Determinare equazioni cartesiane di $V \cap T$.

(e) Determinare equazioni parametriche di $V + T$.

Esercizio 13. Verificare che i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono dei sottospazi e determinarne somma e intersezione

(a) $V = \{(u + 2v, u - v, 2u + 3v) : u, v \in \mathbb{R}\}$;

(b) $W = \{(u - v, u, u + v) : u, v \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 14. Verificare che i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono dei sottospazi e determinarne somma e intersezione

(a) $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,\ x_3 - x_4 = 0\}$;

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_4 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}$;

Esercizio 15. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : 2x_1 - x_3 = x_2 + 2x_4 + x_5 = 0\}.$$

Si verifichi che V è un sottospazio e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 16. Dati i sottospazi

$$V_1 := \{(0, a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}, \qquad V_2 := \{(p, q, q, r) : p, q, r \in \mathbb{R}\},$$

trovare la dimensione e una base di

(a) V_1;

(b) V_2;

(c) $V_1 \cap V_2$;

(d) $V_1 + V_2$.

Esercizio 17. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \mathcal{L}((1, 0, 2, 0), (0, -1, 1, 2)) \qquad V = \mathcal{L}((0, 0, 1, -1), (1, 2, -1, -3))\,.$$

Calcolare la dimensione di U, di V, di $U \cap V$ e di $U + V$.

Esercizio 18. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \mathcal{L}((1,2,1,2),(0,1,2,3)) \qquad V = \mathcal{L}((1,1,0,0),(0,0,1,1))\,.$$

Determinare la dimensione di U, di V, di $U \cap V$ e di $U + V$.

Esercizio 19. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z = 0\} \qquad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-y+z = 0\}\,.$$

Trovare una base e calcolare la dimensione di U, di V, di $U \cap V$ e di $U + V$.

Esercizio 20. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}\,,$$

$$V = \mathcal{L}((1,0,1),(1,2,0),(0,2,-1))\,.$$

Determinare una base e la dimensione di U, di V, di $U \cap V$ e di $U + V$.

Esercizio 21. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z - t = 0,\ 3y - z = 0\}\,,$$

$$V = \mathcal{L}((1,2,-1,0),(2,0,1,1))\,.$$

Determinare una base e la dimensione di U, di V, di $U \cap V$ e di $U + V$.

Esercizio 22. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0, x - 2y - z = 0\}\,,$$

$$V = \mathcal{L}((1,2,0),(0,2,-1),(1,-4,3))\,.$$

Determinare una base e la dimensione di U, di V, di $U \cap V$ e di $U + V$.

Esercizio 23. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z - t = 0,\ 3y - z = 0\}\,,$$

$$V = \mathcal{L}((1,2,-1,0),(2,0,1,1))\,.$$

Determinare una base e la dimensione di U, di V, di $U \cap V$ e di $U + V$.

Esercizio 24. Siano U e W i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti da:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + 4z = x - 2z + 2t = 0\}$$

$$W = \mathcal{L}((1,-1,2,0),(-2,6,-3,1),(-1,5,-1,1))$$

(a) Trovare una base dei sottospazi U e W.

(b) Trovare la dimensione dei sottospazi $U + W$ e $U \cap W$.

Esercizio 25. Siano U e W i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti da:

$$U = \mathcal{L}((1, -1, 1, 1), (7, 3, 1, 0), (4, 6, -2, -3))$$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z = x - y - 3z + t = 0\}$$

(a) Trovare una base dei sottospazi U e W.

(b) Trovare la dimensione dei sottospazi $U + W$ e $U \cap W$.