FOGLIO 1 - Vettori, rette e piani

Esercizio 1. Determinare un'equazione parametrica e Cartesiana della retta nello spazio

(a) Passante per i punti $A = (1, 0, 3)$ e $B = (3, -1, 0)$.

(b) Passante per il punto $P = (1, 3, 1)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OQ} = (2, 0, 0)$.

(c) Di equazione Cartesiana

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y - x + z = 0 \end{cases}$$

Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.

Esercizio 2. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad r_1 : \begin{cases} x = s \\ y = 2 \\ z = s + 2 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = s \\ y = 2 \\ z = s + 1 \end{cases} \quad r_3 : \begin{cases} x = -6s \\ y = -3s + 2 \\ z = -3s - 2 \end{cases}$$

(a) Verificare se le rette r e r_1 sono incidenti. In caso affermativo, determinare l'equazione della retta ortogonale a r e r_1 e passante per il loro punto di intersezione.

(b) Determinare la posizione reciproca (cioè e se sono incidenti, parallele o sghembe) delle rette r e r_2.

(c) Dimostrare che le rette r e r_3 sono complanari. Si determini un'equazione cartesiana del piano contenente r e r_3.

Esercizio 3. Determinare la posizione reciproca (parallele, incidenti o sghembe) delle rette r e r' di equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = s \\ y = 1 \\ z = 2s + 1 \end{cases}$$

Esercizio 4. (a) Determinare equazioni parametriche della retta r passante per i punti $A = (2, 3, 1)$ e $B = (0, 0, 1)$ e della retta s passante per i punti $C = (0, 0, 0)$ e $D = (4, 6, 0)$.

(b) Stabilire se r e s sono complanari. In caso affermativo, trovare un'equazione cartesiana del piano contenente r e s.

Esercizio 5. Si considerino le rette r_1 e r_2 di equazioni parametriche:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

(a) Si mostri che le due rette sono incidenti.

(b) Si determini l'equazione della retta ortogonale a r_1 e r_2 e passante per il loro punto di intersezione.

Esercizio 6. (a) Trovare un'equazione cartesiana del piano π parallelo alla retta

$$r : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 3 \end{cases}$$

e all'asse z e passante per il punto $P = (1, 2, -4)$.

(b) Trovare un'equazione cartesiana del piano π parallelo al piano α di equazione cartesiana $x + 4y - 3z = 7$ e passante per $P = (5, -1, -1)$.

Esercizio 7. Sia r la retta nello spazio di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = -t - 7 \\ z = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Determinare un'equazione cartesiana del piano ortogonale alla retta r e contenente il punto $P = (1, 2, 3)$.

Esercizio 8. Sia r la retta nello spazio di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

e sia s la retta passante per i punti $A = (2, -4, -1)$ e $B = (-1, -1, -1)$.

1. Mostrare che le due rette sono complanari e trovare un'equazione del piano π che le contiene.

2. Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $C = (2, 1, 3)$ e ortogonale al piano π.

Esercizio 9. Siano r_1, r_2 le rette nello spazio di equazioni parametriche

$$r_1 : \begin{cases} x &= 1 + 3t \\ y &= -t \\ z &= 1 + 3t \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} x &= s \\ y &= 2 \\ z &= s \end{cases}$$

1. Si determini un'equazione del piano π contenente le rette r_1 e r_2.

2. Si stabilisca se il piano π contiene la retta r_3 di equazioni cartesiane

$$r_3 : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

3. Si stabilisca se la retta r_4 di equazione cartesiana

$$r_4 : \begin{cases} 6x - y - 13 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

interseca il piano τ di equazione cartesiana

$$\tau : \; 2x - y + z = 0.$$

Esercizio 10. Si considerino le rette nello spazio di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

1. Dopo avere verificato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione cartesiana della retta passante per $A = (1, 1, 1)$ ed incidente r ed s.

2. Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per $B = (1, 2, -3)$ e perpendicolare a r.

3. Determinare le equazioni cartesiane della retta passante per il punto $A = (1, 1, 1)$ e perpendicolare alle due rette r ed s.

Esercizio 11. Sia r la retta nello spazio passante per i punti $A = (0, 0, 1)$ e $B = (-2, -1, 0)$ e sia s la retta passante per i punti $C = (1, 1, 1)$ e $D = (-1, 0, 0)$.

1. Mostrare che le due rette sono complanari e trovare un'equazione del piano π che le contiene.

2. Trovare le equazioni parametriche della retta passante per l'origine ortogonale al piano π.

Esercizio 12. Sia r la retta in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

e siano $P = (3, 2, -1)$ e $Q = (2, -1, 5)$ punti di $\mathbb{R}^3$.

(a) Scrivere l'equazione del fascio di piani passanti per r.

(b) Determinare il piano passante per r e per il punto P.

(c) Determinare la retta parallela a r e passante per Q.

(d) Determinare il piano passante per r e parallelo alla retta

$$s : \begin{cases} 3y - z - 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Esercizio 13. Sia r la retta in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$r : \begin{cases} 3y - z - 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

e siano $P = (1, 2, -2)$ e $Q = (1, 0, -1)$ punti di $\mathbb{R}^3$.

(a) Scrivere l'equazione del fascio di piani passanti per r.

(b) Determinare il piano passante per r e per il punto P.

(c) Determinare la retta parallela a r e passante per Q.

(d) Determinare il piano passante per r e parallelo alla retta

$$s : \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 14. Sia r la retta in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x + y + z - 1 & = & 0 \\ x + 2z & = & 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione del fascio di piani per r.

(b) Determinare il piano passante per r e per il punto $A = (2, 1, 0)$.

(c) Determinare il piano passante per r parallelo alla retta

$$s : \begin{cases} x - y - z - 2 & = & 0 \\ x + y + 2z - 1 & = & 0 \end{cases}$$

Esercizio 15. In $\mathbb{R}^3$, siano dati il piano $\alpha : 2x + 2y + z = 0$, il vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e la retta

$$r : \begin{cases} 2(y - 1) & = & z \\ 4(x - 2) & = & 3z \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione del fascio di piani per r.

(b) Determinare il piano passante per r e ortogonale ad α.

(c) Determinare il piano passante per r e parallelo a $\mathbf{v}$.

(d) Determinare il piano passante per r e per il punto $P = (3, 2, 4)$.

Esercizio 16. In $\mathbb{R}^3$, siano dati il piano $\alpha : 2x + 2y + z = 0$, il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e la retta

$$r : \begin{cases} 2(x - 1) & = & z \\ 4(y - 2) & = & 3z \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione del fascio di piani per r.

(b) Determinare il piano passante per r e ortogonale ad α.

(c) Determinare il piano passante per r e parallelo a $\mathbf{v}$.

(d) Determinare il piano passante per r e per il punto $P = (2, 3, 4)$.

Esercizio 17. Sia data la retta

$$r : \begin{cases} 2(1 - y) & = & z \\ 3(x - 1) & = & 4z \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione del fascio di piani per r.

(b) Determinare, se esiste, il piano passante per r e perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

Esercizio 18. Sia r la retta in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$r : \begin{cases} 2(x-1) &= z \\ 3(y-2) &= 4z \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione del fascio di piani per r.

(b) Determinare, se esiste, il piano passante per r e perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = -6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Esercizio 19. Sia r la retta in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x - 4z &= 1 \\ 3x + 2y - 2z &= 1 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione del fascio di piani per r.

(b) Determinare, se esiste, il piano passante per r e perpendicolare alla retta

$$s : \begin{cases} x &= 3t + 1 \\ y &= 2t \\ z &= -t + 1 \end{cases}$$

(c) Determinare il piano passante per r e parallelo al piano α di equazione $x + 4y - z = 7$

Esercizio 20. Sia r la retta in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$r : \begin{cases} x - 4 &= 3z \\ 3(y-2) &= -2z \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione del fascio di piani per r.

(b) Determinare, se esiste, il piano passante per r e perpendicolare alla retta

$$s : \begin{cases} x &= 4t - 2 \\ y &= -t + 3 \\ z &= -2t + 5 \end{cases}$$

(c) Determinare, se esiste, il piano passante per r e parallelo al piano α di equazione $-x + 3y + 5z = 9$