

TRENTO, A.A. 2015/16
CORSO DI ALGEBRA
FOGLIO DI ESERCIZI # 7

Esercizio 7.1. Sia N una norma su un dominio A , e $a, b \in A$.

Si mostri che se $b \mid a$ in A , allora $N(b) \mid N(a)$ in \mathbf{Z} .

Esercizio 7.2. Vogliamo vedere che in $A = \mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ non esiste in generale il massimo comun divisore. Consideriamo

$$a = 6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5}), \quad \text{e} \quad b = 2 \cdot (1 + \sqrt{-5}).$$

Fate vedere che non esiste il MCD di a ed b .

(SUGGERIMENTO: Supponiamo per assurdo che esista il MCD d di a e b . Allora la norma di d divide la norma di a e quella di b , dunque la norma di d divide 12. D'altra parte 2 e $1 + \sqrt{-5}$ dividono a e b , e dunque d , dunque 4 e 6 dividono la norma di d , per cui 12 divide la norma di d . Dunque $N(d) = 12$. Ma non ci sono in A elementi di norma 12.)

Esercizio 7.3. Sia N una norma speciale sul dominio A .

Sia $a \in A$. Si mostri che se $N(a)$ è un numero primo, allora a è irriducibile in A .

Esercizio 7.4. Per ciascuno dei domini seguenti, si esibisca una norma speciale

- \mathbf{Z} ,
- l'anello dei polinomi $F[x]$, con F un campo,
- $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$.

Esercizio 7.5. Si mostri che la funzione

$$N : \mathbf{Z}[x] \rightarrow \mathbf{N} \\ a \mapsto 2^{\text{grado}(a)}$$

per $a \neq 0$, e $N(0) = 0$ è una norma non speciale.

Si mostri che la funzione

$$N : \mathbf{Z}[x] \rightarrow \mathbf{N} \\ a \mapsto |a_{\text{grado}(a)}| \cdot 2^{\text{grado}(a)}$$

per $a = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, con $a_n \neq 0$ (dunque $N(a) = |a_n| \cdot 2^n$ per un tale a), e $N(0) = 0$ è una norma speciale. Qui $|z|$ indica il valore assoluto del numero intero z ,

$$|z| = \begin{cases} z & \text{se } z \geq 0, \\ -z & \text{se } z < 0. \end{cases}$$

Esercizio 7.6. Sia A un dominio in cui ogni elemento diverso da zero si scriva come prodotto di irriducibili.

- (1) Si mostri che se in A vale la fattorizzazione unica, allora gli irriducibili sono primi.

- (2) Si mostri che se in A gli irriducibili sono primi, allora vale la fattorizzazione unica.

Esercizio 7.7.

- (1) Si dia la definizione di dominio euclideo.
- (2) Si mostri che la norma di un dominio euclideo è speciale.
- (3) Si mostri che in un dominio euclideo gli irriducibili sono primi.

Esercizio 7.8. Si mostri che gli interi di Gauss sono un dominio euclideo.

Esercizio 7.9. Sia F un campo, $0 \neq f \in F[x]$ un polinomio di grado n .

- (1) Si mostri che f ha al più n radici distinte in F .
- (2) Si mostri con un esempio che questo non è necessariamente vero se F è solo un anello commutativo con unità.

Esercizio 7.10. Con l'algoritmo visto a lezione, si scrivano come somma di due quadrati alcuni dei seguenti numeri primi.

29, 41, 53, 89, 97, 433.

(Fate in particolare almeno uno fra 89 e 433, che richiedono più di una divisione con resto.)

E se vi avessi chiesto di scrivere come somma di due quadrati il numero primo

10751759?

Esercizio 7.11 (Facoltativo). Si determinino gli irriducibili (che sono la stessa cosa dei primi) in $\mathbf{Z}[i]$.

Esercizio 7.12. Sia N una norma speciale sul dominio A .

Si mostri che ogni elemento di A diverso da zero si scrive come prodotto di irriducibili.