TRENTO, A.A. 2015/16
CORSO DI ALGEBRA
FOGLIO DI ESERCIZI # 6

Esercizio 6.1. Si enunci e si dimostri la proprietà universale dell'anello dei polinomi.

Esercizio 6.2. Sia B un anello commutativo con unità 1, e A un suo sottoanello contenente 1. Sia $\alpha \in B$.

- Si mostri che l'insieme
$$D = \{ a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n : n \in \mathbf{N}, a_i \in A \}$$
è il più piccolo sottoanello di B che contenga A e α.
- Si mostri che D è l'immagine del morfismo valutazione
$$\begin{aligned} v_\alpha : A[x] &\to B \\ a &\mapsto a(\alpha). \end{aligned}$$

Esercizio 6.3. Sia A un insieme, e R una relazione su A che sia riflessiva e transitiva.

Si consideri la relazione su A definita, per $a, b \in A$, da
$$aSb \text{ se e solo se } aRb \text{ e } bRa.$$
Si mostri che S è una relazione di equivalenza.

Esercizio 6.4. Sia A un dominio, $a \in A$.

Mostrate che $(a) = aA = \{ ac : c \in A \}$ è un ideale di A, detto l'*ideale principale generato da A.*

Esercizio 6.5. Sia A un dominio, $a, b \in A$.

Definiamo su A la divisibilita nel solito modo: si dice che b divide a (in simboli $b \mid a$) se esiste $c \in A$ tale che $a = bc$.

- Si mostri che la divisibilità è riflessiva e transitiva.
- Si mostri che sono equivalenti
  (1) $a \mid b$ e $b \mid a$,
  (2) $a = b\varepsilon$, con $\varepsilon \in A$ invertibile,
  (3) $(a) = (b)$.

Esercizio 6.6. Sia F un campo, $A = F[x]$ l'anello dei polinomi, $a \in A$.

Si mostri che sono equivalenti

- a è invertibile in $A[x]$,
- a è un polinomio di grado 0, e
- a è una costante non nulla.

Si mostri che se $a, b \in A$, allora $a \mid b$ e $b \mid a$ se e solo se $a = b\varepsilon$, con ε una costante non nulla.

Esercizio 6.7. Sia F un campo, $A = F[x]$ l'anello dei polinomi. Mostrate che ogni ideale di A è principale. Mostrate in particolare che se $I \neq \{ 0 \}$ è un ideale, allora $I = (a)$, ove a è un elemento di I di grado minimo.

Esercizio 6.8. Sia $A = \mathbf{Z}[x]$ l'anello dei polinomi. Considerate l'insieme

$$I = (2, x) = \{\, 2a + xb : a, b \in A \,\}.$$

Mostrate che I è un ideale, ma che non è principale, nel senso che non esiste $c \in A$ tale che $I = (c)$.
(SUGGERIMENTO: Se esistesse un tale c, allora $c \mid 2$, dunque $c \in \{\, 1, -1, 2, -2 \,\}$. D'altra parte tutti i polinomi di I hanno termine noto *pari*, dunque $c \in \{\, 2, -2 \,\}$. Ma $c \mid x$.)

Esercizio 6.9. Mostrate per induzione sul grado di a:

> Sia F un campo, $a, b \in F[x]$, con $b \neq 0$. Allora esistono $q, r \in F[x]$ tali che
> $$\begin{cases} a = bq + r, \\ r = 0 \text{ o } \operatorname{grado}(r) < \operatorname{grado}(b). \end{cases}$$

(SUGGERIMENTO: Il caso in cui $a = 0$, o $\operatorname{grado}(a) < \operatorname{grado}(b)$ è chiaro, si ha $q = 0$ e $r = a$. Altrimenti, sia $n = \operatorname{grado}(a) \geq \operatorname{grado}(b) = m$, e

$$a = a_n x^n + \text{termini di grado minore}, \qquad b = b_m x^m + \text{termini di grado minore},$$

e dunque $a_n \neq 0 \neq b_m$.
Allora $a - a_n b_m^{-1} x^{n-m} b$ ha grado minore di n (o è zero), e quindi posso applicare l'ipotesi induttiva.)
Mostrate l'unicità di quoziente e resto nella divisione fra polinomi.

Esercizio 6.10. Sia B un anello commutativo con unità, estensione del campo F, e $\alpha \in B$.
Supponiamo che α sia algebrico su F, cioè che esista un polinomio $0 \neq f \in F[x]$ tale che $f(\alpha) = 0$.
Si usi il primo teorema di isomorfismo fra anelli per mostrare che c'è un isomorfismo

$$\begin{aligned} \widetilde{v_\alpha} : F[x]/I &\to F[\alpha] \\ a + I &\mapsto v_\alpha(a) = a(\alpha), \end{aligned}$$

ove $I = (g)$, e g è il polinomio minimo di α su F, ovvero il polinomio monico di grado minimo fra tutti quelli che hanno α come radice.

Esercizio 6.11. Si dimostri il

Lemma. Sia $\alpha \in \mathbf{C}$ con la proprietà che
(1) $\alpha \notin \mathbf{Q}$, e
(2) α è radice di un polinomio $x^2 + c_1 x + c_0 \in \mathbf{Z}[x]$.
Allora vale che $\mathbf{Z}[\alpha] = \{\, a_0 + a_1\alpha : a_0, a_1 \in \mathbf{Z} \,\}$, e la scrittura degli elementi di $\mathbf{Z}[\alpha]$ nella forma $a_0 + a_1\alpha$ è unica.

Esercizio 6.12.
(1) Si mostri che $\sqrt{2}, \sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$.
(2) Si mostri che se $p \in \mathbf{N}$ è un numero primo, allora $\sqrt{\pm p} \notin \mathbf{Q}$.

(3) Si mostri che il Lemma dell'Esercizio 6.11 si applica ai casi in cui $\alpha = \sqrt{2}, \sqrt{3}, i, \sqrt{-5}$.

Esercizio 6.13. Sia A un dominio. Per $a, b \in A$ si dice che a è associato a b se $a = b\varepsilon$ per qualche ε invertibile.

Si dimostri che l'*essere associato* è una relazione di equivalenza.

Esercizio 6.14. Sia A un dominio, e $a \in A$, che non sia né zero, né invertibile.

Sia $a = uv$, con $u, v \in A$. Si dimostrino i due fatti seguenti.

(1) Se u è invertibile, allora v è associato ad a.
(2) Se u è associato ad a, allora v è invertibile.

Esercizio 6.15. Sia A un dominio, e $a \in A$, che non sia né zero, né invertibile.

Si dimostri che sono equivalenti le seguenti affermazioni.

(1) I soli divisori sono gli elementi invertibili, e i cosiddetti elementi *associati* ad a.
(2) Se $a = uv$, allora o u o v è invertibile.
(3) Se $a = uv$, allora o u o v è associato ad a.
(4) Se $a = uv$, allora
    - o u è invertibile, e v è associato ad a,
    - o u è associato ad a, e v è invertibile.

Esercizio 6.16. Sia dia la definizione di elemento irriducibile e elemento primo in un dominio.

Esercizio 6.17. Sia A un dominio. Si mostri che se $a \in A$ è primo, allora è anche irriducibile.

Esercizio 6.18. Si mostri che 2 è irriducibile, ma non primo, in $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$.

Più in generale, partendo dall'eguaglianza

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5}).$$

si mostri che 2, 3, $1 + \sqrt{-5}$ e $1 - \sqrt{-5}$ sono irriducibili, ma non primi, in $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$.

Esercizio 6.19. Si mostri che le affermazioni seguenti sono equivalenti, per un elemento a di un dominio A.

(1) a è invertibile,
(2) a divide 1, e
(3) a è associato a 1.