TRENTO, A.A. 2015/16
CORSO DI ALGEBRA
FOGLIO DI ESERCIZI # 4

Esercizio 4.1. Enunciate e dimostrate il Primo teorema di isomorfismo fra insiemi.

Esercizio 4.2. Mostrate che se $\gcd(m, n) = 1$,la funzione

$$g : \mathbf{Z}/mn\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$$
$$[x]_{mn} \mapsto ([x]_m, [x]_n)$$

è ben definita, ed è una biiezione.

Esercizio 4.3. Mostrate che se $\gcd(m, n) = 1$, allora $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

Esercizio 4.4. Siano G, H due gruppi (qui e nel seguito, intendo $(G, \cdot, 1)$ e $(H, \cdot, 1)$), e $f : G \to H$ un morfismo di gruppi.

Fate vedere che $f(1) = 1$ e che $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

Esercizio 4.5. Siano A, B anelli, e $f : A \to B$ un morfismo di anelli.

(1) Mostrate che $f(0) = 0$ e $f(-a) = -f(a)$.
(2) Supponiamo che A, B abbiano unità, entrambe denotate 1. Mostrate con un esempio (contenuto nel prossimo esercizio) che non si ha necessariamente $f(1) = 1$.
(3) Mostrate che se f è suriettiva, e A e B hanno unità, allora $f(1) = 1$. (Anzi, si può fare di meglio, si può vedere che se A ha unità 1, allora anche B ha unità, e questa è $f(1)$.
(4) Supponiamo che A, B abbiano unità, e che si abbia $f(1) = 1$. Mostrate che se $a \in A$ è invertibile, allora anche $f(a)$ lo è, e si ha $f(a)^{-1} = f(a)^{-1}$.

Esercizio 4.6. Siano A, B i seguenti insiemi di matrici.

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbf{Z} \right\}, \qquad B = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbf{Z} \right\}.$$

(1) Notate che $A \subseteq B$.
(2) Mostrate che A, B sono anelli rispetto ale solite operazioni fra matrici.
(3) Mostrate che A ha unità e (determinatela) e B ha unità f (detrminatela).
(4) Mostrate che la funzione $g : A \to B$ data da $f(a) = a$ è un morfismo di anelli.
(5) Mostrate che $g(e) \neq f$.

Esercizio 4.7. Siano G, H gruppi.

(1) Mostrate che l'insieme $G \times H$ diventa un gruppo rispetto all'operazione per componenti.
(2) Mostrate che $(1, 1)$ è l'elemento neutro.
(3) Mostrate che $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$.

Esercizio 4.8. Siano A, B anelli.

(1) Mostrate che l'insieme $A \times B$ diventa un anello rispetto all'operazione per componenti.
(2) Mostrate che $(0, 0)$ è l'elemento neutro per la somma.
(3) Mostrate che $-(a, b) = (-a, -b)$.
(4) Mostrate che se A, B hanno unità 1, allora $(1, 1)$ è l'unità di $A \times B$. (E se viceversa $A \times B$ ha unità, cosa si può dire di A e B?)
(5) Supponiamo che A, B, e dunque $A \times B$, abbiano unità. Mostrate che (a, b) è invertibile in $A \times B$ se e solo se a lo è in A, e b in B, e in questo caso si ha
$$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1}).$$

Esercizio 4.9. Mostrate che la funzione dell'Esercizio 4.2 è un isomorfismo di anelli.

Esercizio 4.10. Mostrate che i sottogruppi di $\mathbf{Z}$ sono tutti e soli della forma
$$n\mathbf{Z} = \{\, nk : k \in \mathbf{Z} \,\},$$
per $n \in \mathbf{N}$.

Esercizio 4.11. Mostrate che i sottoanelli di $\mathbf{Z}$ sono tutti e soli della forma
$$n\mathbf{Z} = \{\, nk : k \in \mathbf{Z} \,\},$$
per $n \in \mathbf{N}$.

Esercizio 4.12. Enunciate e dimostrate il Primo teorema di isomorfismo per gli anelli, nella prima forma. Applicatelo per mostrare il Teorema Cinese dei Resti.

Esercizio 4.13. Date la definizione di ideale, e dite chi sono gli ideali di $\mathbf{Z}$. Date la definizione di relazione di equivalenza su un anello ccompatibile con le operazioni. Mostrate che ogni relazione di equivalenza su un anello che sia compatibile con le operazioni è una congruenza modulo un ideale.

Esercizio 4.14. Sia A un anello.

(1) Mostrate che valgono le *regole dei segni*
$$a(-b) = (-a)b = -ab, (-a)(-b) = ab.$$
Qui "$-$" indica l'*opposto*.
(Suggerimento: Ad esempio, per mostrare che $a(-b) = -ab$ dovete notare che)
$$ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a \cdot 0 = 0.$$
(2) Per $a, b \in A$, definiamo la *differenza*
$$a - b = a + (-b).$$
Dunque, attenzione, a sinistra "$-$" indica la differenza che sto definendo, a destra "$-$" indica l'*opposto*
   (a) Mostrate che valgono le proprietà distributive
   $$(a - b)c = ac - bc \qquad c(a - b) = ca - cb.$$
   (b) La differenza è una operazione associativa? (Suggerimento: Fornite una dimostrazione o un controesempio.)