TRENTO, A.A. 2015/16
CORSO DI ALGEBRA
FOGLIO DI ESERCIZI # 1

Esercizio 1.1 (Facoltativo). Si consideri quello che succede moltiplicando il numero

$$142857$$

per $1, 2, 3, 4 \dots$. Si descriva quel che succede, si spieghi perché succede, e si produca almeno un altro esempio del genere.

Esercizio 1.2 (Assolutamente facoltativo, non perdeteci tempo se avete altro da fare). Come ricordiamo dalla scuola (ed è scritto nelle note, e vedremo comunque almeno in parte durante il corso), ogni frazione si può scrivere come un numero decimale, che o termina, o è periodico (eventualmente con un antiperiodo).

Usando eventualmente adeguati strumenti di calcolo che potete trovare in rete, verificate il seguente sviluppo decimale

$$\frac{1}{98\,01} = 0.00\,01\,02\,\dots\,96\,97\,99\,00\,01\,\dots$$

e cosí via ripetendo. L'omissione del gruppo 98 nello sviluppo *non* è un errore.

Spiegare. Trovare almeno un altro esempio simile.

Esercizio 1.3. Si *dimostri* che gli unici divisori di 1 in $\mathbf{Z}$ sono 1 e -1. In altre parole, se $x, y \in \mathbf{Z}$, e $x \cdot y = 1$, allora o $x = y = 1$, oppure $x = y = -1$.

Esercizio 1.4. Si mostri che

- 1 e -1 dividono ogni numero intero;
- gli unici numeri interi che dividono ogni numero intero sono 1 e -1;
- ogni numero intero divide 0;
- 0 è l'unico numero intero che è divisibile per ogni numero intero;
- l'unico numero intero divisibile per 0 è 0 stesso.

Esercizio 1.5. Siano $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, e sia $a = b + c$. Si dimostri che se d divide almeno due dei numeri a, b, c, allora divide anche il terzo.

(Come caso particolare si ha che se d divide b e c, allora d divide $b + c$.)

Esercizio 1.6 (Lievissima variante del precedente, ma torna utile). Siano $a, b, c, q, d \in \mathbf{Z}$, e sia $a + qb + c = 0$. Si dimostri che

(1) se d divide a e b, allora divide c, e
(2) se d divide b e c, allora divide a.

Con la notazione di cui più sotto, Abbiamo dunque $D(a) \cap D(b) = D(b) \cap D(c)$.

Esercizio 1.7. Siano $a, b \in \mathbf{Z}$. Si mostri che se $a \mid b$ e $b \mid a$, allora $b = \pm a$.

Esercizio 1.8. Alle Scuole Elementari abbiamo imparato il seguente Teorema:

Teorema. Dati due numeri interi a, b, con $a \geq 0$ e $b > 0$, esistono due numeri $q, r \in \mathbf{Z}$ che soddisfano le proprietà:

(1) $a = b \cdot q + r$,

(2) $0 \leq r < b$.

Se ne dia una dimostrazione, *procedendo per induzione su* a. In pratica, si mostri che l'enunciato vale se $0 \leq a < b$. (E' sufficiente prendere $r = a$, e $q = 0$.) Si supponga allora che $a \geq b$. Si ha $a - b < a$, dunque per ipotesi induttiva esistono q', r, con $0 \leq r < b$. tali che $a - b = bq' + r$, da cui $a = b(q' + 1) + r$.

Qui abbiamo usato una forma di induzione che forse non avete ancora visto, e che trovate descritta negli appunti, nella sezione 6.16, come "seconda forma".

Esercizio 1.9. Usando il Teorema dell'Esercizio 1.8, si dimostri la versione della divisione con resto vista a lezione, in cui a può anche essere negativo, e b basta che sia diverso da 0:

*Teorema. Dati due numeri interi a, b, con $b \neq 0$, esistono unici due numeri $q, r \in$ **Z** che soddisfano le proprietà:*

(1) $a = b \cdot q + r$,

(2) $0 \leq r < |\, b \,|$.

Esercizio 1.10. Si indichino quoziente e resto delle divisioni con resto di a per b, ove a, b assumono i valori seguenti

a	b
-14	4
0	7
-1	7
-2	7
-3	7
-4	7
-5	7
-6	7
-1	1000
-1000	2000
-237	-1508

Esercizio 1.11. Sia $a \neq 0$ un numero intero. Sia $D = D(a)$ l'insieme dei divisori di a,

$$D = \{\, x \in \mathbf{Z} : x \text{ divide } a \,\}.$$

Consideriamo la funzione f definita su $D \setminus \{\, 0 \,\}$ tale che $f(x) = a/x$. All'apparenza i valori di f sono numeri razionali.

Si mostri che in realtà f ha valori in D, ed è quindi una funzione biiettiva su $D \setminus \{\, 0 \,\}$.

In sostanza, quello che vuole dire questo esercizio è che i divisori di un numero intero a vanno a coppie. Infatti $a = bc$ vuol dire sia $b \mid a$ sia $c \mid a$.

Esercizio 1.12. Si mostri che sono equivalenti, per $a, b, d \in \mathbf{Z}$:

- d è un massimo comun divisore di a e b;
- $D(a, b) = D(a) \cap D(b) = D(d)$.

Qui $D(c) = \{\, x \in \mathbf{Z} : x \mid c \,\}$ è l'insieme dei divisori di c.

Esercizio 1.13. Sia $D(a)$ l'insieme dei divisori di $a \in \mathbf{Z}$. Si mostri che

$$D(a) = D(-a),$$

e

$$D(a) \cap D(b) = D(-a) \cap D(b) = D(a) \cap D(-b) = D(-a) \cap D(-b).$$

(In altre parole, $D(a) \cap D(b) = D(|\,a\,|) \cap D(|\,b\,|)$.)

Esercizio 1.14. Si mostri che, con la definizione corretta, il massimo comun divisore fra 0 e 0 è 0.

Esercizio 1.15. Si mostri, *usando direttamente la definizione*, che

(1) se d è un MCD di a e b, allora anche $-d$ lo è, e che
(2) se d_1 e d_2 sono due MCD di a e b, allora $d_2 = \pm d_1$. (Suggerimento: d_1 è un divisore comune, e d_2 è un MCD, dunque $d_1 \mid d_2 \dots$)

Attenzione!

Nell'esercizio seguente, trascurate per ora i punti (2), (3), (4).

Esercizio 1.16. Per ognuna (o almeno qualcuna, diciamo ≥ 3) delle seguenti coppie (a, b), usando l'algoritmo di Euclide (esteso),

(1) si trovi il massimo comun divisore d di a e b;
(2) si trovi il minimo comune multiplo di a e b;
(3) si trovi *una coppia* di numeri (x, y) tali che $ax + by = d$;
(4) si trovino *tutte le coppie* di numeri (x, y) tali che $ax + by = d$.

a	b
55	34
89	55
957	115
10946	6766
9762	501
736	337