Note introduttive di Algebra per il corso di Geometria I dell'Università degli Studi di Trento

Emanuele Bottazzi* & Valentina Clamer†

Versione aggiornata al 16 dicembre 2015‡

Indice

*Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Trento, emanuele.bottazzi@unitn.it.

†Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Trento, v.clamer@unitn.it.

‡Eventuali versioni successive sono reperibili alla pagina `http://www.science.unitn.it/~bottazzi/geometria1516.html`.

1 Introduzione

Lo scopo di queste note è di fornire alcuni elementi introduttivi di algebra per gli studenti del corso di Geometria I. Le note non hanno alcuna pretesa di completezza, ma vogliono aiutare a fissare qualche idea. Ci saranno alcune definizioni, molti esempi (che si spera aiutino a suscitare interesse nei confronti degli oggetti definiti) e nessun "teorema".

Due note sulla simbologia:

- gli esempi segnati dal simbolo ♡ sono più complessi rispetto agli altri, e possono essere tranquillamente saltati;
- le affermazioni seguite dal simbolo (♠) sono vere ma non ovvie, quindi andrebbero dimostrate.

1.1 Un avvertimento e una richiesta

Leggendo queste note, vi preghiamo di fare attenzione: è altamente probabile che ci siano alcuni errori. Se ne trovate qualcuno, vi chiediamo la cortesia di segnalarcelo con una mail all'indirizzo `emanuele.bottazzi@unitn.it`, così che lo possiamo correggere.

2 Gruppi

La strada che viene seguita in algebra per introdurre la definizione di campo è di solito lunga, tortuosa ed estremamente interessante. In queste note taglieremo tutte le deviazioni panoramiche e cercheremo di arrivare alla meta nel minor tempo possibile. La partenza comunque rimane la definizione di gruppo, uno degli oggetti algebrici più interessanti, versatili ed affascinanti.

Definizione 2.1 *Un* gruppo *è una terna* $(G, \circ, e)$*, dove:*

- G *è un insieme;*
- $e \in G$*;*
- $\circ : G \times G \to G$ *è una funzione che soddisfa le proprietà:*
  1. *(Associatività) per ogni* $x, y, z \in G$ *vale*
  $$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$$
  (e quindi le parentesi si possono omettere e si può semplicemente scrivere $x \circ y \circ z$*);*

2. *(Elemento neutro) per ogni $x \in G$ vale*

$$x \circ e = e \circ x = x$$

3. *(Esistenza dell'inverso) per ogni $x \in G$ esiste $x^\star \in G$ che soddisfa*

$$x \circ x^\star = x^\star \circ x = e$$

In generale, non è richiesta la proprietà di

(4) (Commutatività) per ogni $x, y \in G$

$$x \circ y = y \circ x$$

Quando l'operazione $\circ$ ha anche questa proprietà, il gruppo $(G, \circ, e)$ si dice *commutativo* o *abeliano*[*]. Di solito per i gruppi abeliani si usa indicare l'operazione con il simbolo "+" invece di "$\circ$".

2.1 Esempi di gruppi

Diversi oggetti matematici hanno in modo "naturale" una struttura di gruppo.

Esempio 2.2 *$(\mathbb{Z}, +, 0)$ è un gruppo abeliano. Senza grosse sorprese, anche $(\mathbb{Q}, +, 0)$, $(\mathbb{R}, +, 0)$ e $(\mathbb{C}, +, 0)$ sono gruppi abeliani. Inoltre, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ sono gruppi abeliani.*

Al di là degli insiemi numerici, che si possono studiare sotto molti punti di vista, un altro esempio interessante è quello dei *gruppi di funzioni*.

Esempio 2.3 *Sia X un insieme non vuoto. Chiamiamo $aut(X)$[†] l'insieme*

$$aut(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ è biettiva}\}$$

Su $aut(X)$ definiamo una composizione $\circ : aut(X) \times aut(X) \to aut(X)$ in questo modo:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Si verifica facilmente che la funzione id_X definita da $id_X(x) = x$ per ogni $x \in X$ ha la proprietà

$$id_X \circ f = f \circ id_X = f$$

[*] Da Niels Henrik Abel, matematico norvegese del XIX secolo.

[†] Si pronuncia "gruppo degli automorfismi di X".

per ogni $f \in aut(X)$. Inoltre, dato che ogni funzione biettiva ammette un'inversa (♠), per ogni $f \in aut(X)$ è ben definita la sua funzione inversa $f^\star$, che di solito si indica con il simbolo f^{-1}. Deduciamo che per ogni insieme non vuoto X $(aut(X), \circ, id_X)$ è un gruppo.

Osservazione 2.4 *In generale, $aut(X)$* non *è abeliano (♠), ed è interessante provare a trovare degli esempi espliciti di insiemi X per cui questa proprietà fallisce (ad esempio: cosa succede quando $X = \{\triangleleft, \triangle, \triangleright\}$?).*

Il prossimo esempio è di natura squisitamente algebrica.

Esempio 2.5 (Il quadrigruppo di Klein[‡]) *Il quadrigruppo di Klein è il gruppo $(V, \circ, e)$, dove:*

- *V ha quattro elementi, che per comodità denoteremo $V = \{a, b, c, e\}$;*
- *$\circ$ è definita da:*

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Dalla definizione di $\circ$ si può verificare che l'operazione è associativa (♠) e che $a^2 = b^2 = c^2 = e$ (in altre parole: ogni elemento di V è l'inverso di se stesso), quindi V è un gruppo. In più, si può verificare (sempre usando la definizione di $\circ$) che V è abeliano.

Anche il prodotto cartesiano di gruppi è ancora un gruppo.

Esempio 2.6 (♡) *Se $(G, \circ, e)$ e $(J, \diamond, \eta)$ sono due gruppi, anche $(G \times J, \circ \times \diamond, (e, \eta))$, dove*

$$(x, \alpha) \circ \times \diamond (y, \beta) = (x \circ y, \alpha \diamond \beta)$$

è ancora un gruppo (♠), e sarebbe opportuno provare a verificare che $\circ \times \diamond$ soddisfa tutte le proprietà della definizione.

2.2 Non-esempi di gruppi

In questa sezione raccogliamo qualche esempio di oggetto matematico interessante che però non è un gruppo. I primi due "non-esempi" dovrebbero essere molto familiari.

Esempio 2.7 $(\mathbb{N}, +, 0)$ *non è un gruppo. Infatti, ogni numero diverso da* 0 *non ha inverso additivo. Per un motivo analogo, anche* $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ *non è un gruppo.*

Con gli insiemi numerici è possibile inventarsi i non-esempi più disparati.

Esempio 2.8 (♡) *Di seguito, alcuni bizzarri esempi di non-gruppi. Per ciascuno di essi, lo studente interessato potrebbe provare a scoprire quale o quali proprietà di gruppo non vengono soddisfatte.*

- $(\mathbb{R}, \uparrow, 1)$*, dove* $l \uparrow m = l^m$*;*
- $(\mathbb{Q}, \odot, 1)$*, dove* $n \odot u = n^2 u^2$*;*
- $(\mathbb{R}, \oplus, 0)$*, dove* $x \oplus y = \sin(x + y)$*;*
- $(\mathbb{Z}, \otimes, 1)$*, dove* $r \otimes s = \max\{r, s\}$*;*
- $(\mathbb{C}, \wr, 0)$*, dove* $a \wr b = a$*.*

Esistono anche insiemi di funzioni che, pur essendo molto rilevanti per la pratica matematica, non sono un gruppo rispetto all'operazione di composizione.

Esempio 2.9 (Le funzioni continue da $\mathbb{R}$ **a** $\mathbb{R}$**)** *L'insieme*

$$C^0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua}\}$$

delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ *a* $\mathbb{R}$ *con l'operazione di composizione e l'elemento neutro dato dalla funzione identità non è un gruppo. Il motivo fondamentale è che le funzioni continue non sono sempre invertibili rispetto alla composizione (♠).*

Osservazione 2.10 (♡) *Nulla vieta all'insieme* $C^0(\mathbb{R})$ *di essere un gruppo, se lo equipaggiamo con un'altra operazione e di conseguenza con un altro elemento neutro. Ad esempio, cosa succede se consideriamo* $(C^0(\mathbb{R}), +, c_0)$*, dove la funzione* $f + g$ *è definita da*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

e con c_0 *indichiamo la funzione costante* 0*?*

3 Anelli

Avvicinandosi alla definizione di campo, l'oggetto intermedio che si incontra sul cammino è quello di anello. Negli anelli ci sono già due operazioni, che chiameremo somma e prodotto. La somma negli anelli verifica le stesse proprietà delle operazioni dei gruppi ed in più è commutativa, come nei campi. A differenza di quello che succede nei campi, però, il prodotto negli anelli oltre ad essere associativo e ad avere un elemento neutro verifica solo una proprietà essenziale di compatibilità con la somma.

Definizione 3.1 *Un* anello *è una 5-upla ordinata* $(R, +, \cdot, 0, 1)$*, dove:*

- $R \neq \emptyset$ *è un insieme;*
- $0, 1 \in R$*;*
- $+ : R \times R \to R$ *e* $\cdot : R \times R \to R$ *soddisfano le proprietà:*

  1. *(Associatività) per ogni* $x, y, z \in R$ *valgono*
  $$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{e} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$
  2. *(Elemento neutro per la somma) per ogni* $x \in R$ *vale*
  $$x + 0 = 0 + x = x$$

  (2') *(Elemento neutro per il prodotto) per ogni* $x \in R$ *vale*
  $$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

  3. *(Esistenza dell'inverso additivo) per ogni* $x \in R$ *esiste* $-x \in R$ *che soddisfa*
  $$x + (-x) = (-x) + x = 0$$
  4. *(Commutatività dell'addizione) per ogni* $x, y \in R$
  $$x + y = y + x$$
  5. *(Distributività del prodotto rispetto alla somma) per ogni* $x, y, z \in R$
  $$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$
  (in questa formula abbiamo usato la convenzione che il prodotto viene eseguito prima della somma).

In generale, non è richiesta la proprietà di

(3') (Esistenza dell'inverso moltiplicativo) per ogni $x \in R$, se $x \neq 0$ esiste $x^{-1} \in R$ che soddisfa

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$$

Quando l'operazione $\cdot$ ha anche questa proprietà, l'anello $(R, +, \cdot, 0, 1)$ si dice *con divisione*.

Non è nemmeno richiesta la proprietà di

(4') (Commutatività del prodotto) per ogni $x, y \in G$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Quando l'operazione $\cdot$ ha anche questa proprietà, l'anello $(R, +, \cdot, 0, 1)$ si dice *commutativo*[§].

3.1 Esempi di anelli

Esempio 3.2 *Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Consideriamo l'insieme $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\} \subset \mathbb{Z}$, e su questo insieme definiamo le operazioni $+_n, \cdot_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ ponendo*

$$a +_n b = \begin{cases} a + b & \text{se } a + b < n \\ a + b - n & \text{se } a + b \geq n \end{cases}$$

e

$$a \cdot_n b = \begin{cases} ab & \text{se } ab < n \\ ab - kn & \text{se } (k+1)n > ab \geq kn \text{ (con } k \geq 1) \end{cases}$$

Di solito queste operazioni si chiamano somma e prodotto modulo n*, e si indicano così:*

$$a +_p b = a + b \mod n$$

e

$$a \cdot_p b = ab \mod n$$

Si può verificare che $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n, 0, 1)$ è un anello commutativo (♠).

Se n è composto, $\mathbb{Z}_n$ non è un anello con divisione. Una dimostrazione può essere questa: dato che n è composto, possiamo scrivere $n = \prod_{i=1}^{k} p_i$ con p_i primi non necessariamente distinti. I numeri $p = \prod_{i=1}^{k-1} p_i$ e p_k

[§]L'aggettivo "abeliano" si usa solo per i gruppi, quindi non si dice che un anello è abeliano.

appartengono entrambi a $\mathbb{Z}_n$ e sono diversi da 0, in quanto positivi e minori di n, ma, per definizione di prodotto in $\mathbb{Z}_n$, il loro prodotto è

$$pp_k = 0 \mod n$$

Questo implica che né p (né p_k) possono avere un inverso moltiplicativo. Infatti, se supponessimo per assurdo[¶] che p abbia un inverso moltiplicativo p^{-1}, potremmo moltiplicare l'equazione precedente per p^{-1} ed ottenere

$$p^{-1}pp_k = 0 \mod n$$

che implica

$$p_k = 0 \mod n$$

contraddicendo $p_k \neq 0 \mod n$, che avevamo stabilito poco fa.

Il prossimo esempio è molto interessante di per sé, ed è usato sia per descrivere alcuni fenomeni della fisica quantistica sia per ideare algoritmi di computer grafica.

Esempio 3.3 ($\heartsuit$ – I Quaternioni di Hamilton*) *Definiamo l'insieme*

$$\mathbb{H} = \{w + xi + yj + zk \mid w, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Su $\mathbb{H}$ definiamo la somma componente per componente: esplicitamente

$$(w+xi+yj+zk)+(a+bi+cj+dk) = (w+a)+(x+b)i+(y+c)j+(z+d)k$$

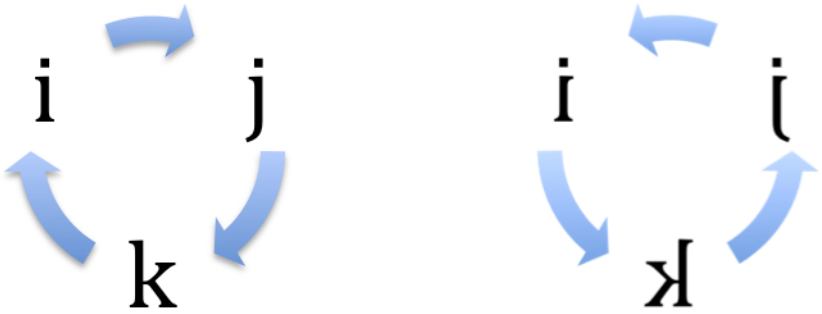
mentre il prodotto è l'usuale prodotto tra polinomi con in più le regole

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$\begin{array}{ll} ij = k & ji = -k \\ jk = i & kj = -i \\ ki = j & ik = -j \end{array}$$

[¶]La dimostrazione per assurdo si può sintetizzare nella seguente inferenza logica: $(\neg A \to \bot) \to A$. In altre parole: se dall'ipotesi che A sia falsa (i.e. assumendo $\neg A$) deduciamo una contraddizione, allora A è vera. Questa tecnica dimostrativa si basa sul principio del terzo escluso (in formula: $A \vee \neg A$, cioè o A è vera o A è falsa, e non ci sono ulteriori alternative) che è rifiutato dai matematici costruttivisti. Per i costruttivisti continua a valere l'implicazione $(\neg A \to \bot) \to \neg\neg A$, ma per loro non è vero che $\neg\neg A$ sia equivalente ad A.

Queste regole si possono ricordare più facilmente pensando a i, j, k disposti in ordine:



Il prodotto di due termini è sempre il terzo; il segno è "+" se i termini vengono moltiplicati in senso orario ed è "−" se i termini vengono moltiplicati in senso antiorario.

Con queste due operazioni, $\mathbb{H}$ è un anello con divisione (♠). Evidentemente non è commutativo, ma comunque estende il campo dei numeri complessi.

La parte rimanente di questa sezione è dedicata all'anello non commutativo delle matrici quadrate di ordine n, che verranno trattate durante il corso di Geometria I. Suggeriamo la lettura dopo aver visto a lezione questi argomenti ed averli adeguatamente metabolizzati.

Esempio 3.4 (L'anello non commutativo delle matrici $n \times n$) *Per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, consideriamo l'insieme*

$$R^{n,n} = \{\textit{matrici } n \times n \textit{ a coefficienti reali}\}$$

con le operazioni di somma e prodotto tra matrici viste a lezione. Se chiamiamo 0_n la matrice $n \times n$ le cui componenti sono tutte uguali a 0 e se chiamiamo Id_n la matrice identità di ordine n, allora $(R^{n,n}, +, \cdot, 0_n, Id_n)$ è un anello per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Ci sono due grossi casi da distinguere: quello in cui $n = 1$ e quello in cui $n > 1$. Se $n = 1$, $(R^{1,1}, +, \cdot, 0_1, Id_1)$ è un campo che si comporta come il campo dei numeri reali[†]*.*

Se $n > 1$, abbiamo visto a lezione che valgono

[†]Più precisamente, si può dimostrare che $(R^{1,1}, +, \cdot, 0_1, Id_1)$ e $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ sono due campi *isomorfi*, qualsiasi cosa voglia dire questa parola. Intuitivamente, non c'è nessuna proprietà dei campi che riesce a distinguerli, quindi a tutti gli effetti possiamo pensare che siano lo stesso campo.

$\neg$*(3')* $R^{n,n}$ *non è un anello con divisione (cioè ci sono delle matrici* $n \times n$ *non invertibili), e*

$\neg$*(4')* *il prodotto in* $R^{n,n}$ *non è commutativo (cioè esistono* $A, B \in R^{n \times n}$ *tali per cui* $AB \neq BA$*).*

Osservazione 3.5 *(♡) A lezione dovrebbe essere stato mostrato (se non dimostrato) che c'è una corrispondenza biunivoca tra le funzioni lineari* $L : \mathbb{R}^n \to R^n$ *e le matrici* $n \times n$*. Inoltre, questa corrispondenza trasforma la somma di matrici in somma di funzioni lineari e il prodotto tra matrici in composizione di funzioni (♠). Quindi, le stesse considerazioni viste nell'esempio precedente valgono per l'insieme delle funzioni lineari* $L : \mathbb{R}^n \to R^n$ *con le operazioni di somma e composizione.*

4 Campi

Dopo aver visto le definizioni di gruppo e anello, la definizione di campo diventa semplicemente:

Definizione 4.1 *Un campo è un anello commutativo con divisione.*

Più esplicitamente, un campo è un insieme sul quale sono definiti una "somma" ed un "prodotto", e dove si possono eseguire le "sottrazioni" e le "divisioni". Queste due ultime proprietà di solito vengono espresse richiedendo l'esistenza degli inversi additivi e moltiplicativi. Formalmente, abbiamo:

Definizione 4.2 *Un* campo *è una 5-upla ordinata* $(F, +, \cdot, 0, 1)$*, dove:*

- $F \neq \emptyset$ *è un insieme;*
- $0, 1 \in F$*;*
- $+ : F \times F \to F$ *e* $\cdot : F \times F \to F$ *soddisfano le proprietà:*
  1. *(Associatività) per ogni* $x, y, z \in F$ *valgono*
  $$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{e} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$
  2. *(Elemento neutro per la somma) per ogni* $x \in F$ *vale*
  $$x + 0 = 0 + x = x$$

(2') *(Elemento neutro per il prodotto) per ogni $x \in F$ vale*

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

3. *(Esistenza dell'inverso additivo) per ogni $x \in F$ esiste $-x \in F$ che soddisfa*
$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

(3') *(Esistenza dell'inverso moltiplicativo) per ogni $x \in F$, se $x \neq 0$ esiste $x^{-1} \in F$ che soddisfa*

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$$

4. *(Commutatività della somma) per ogni $x, y \in F$*

$$x + y = y + x$$

(4') *(Commutatività del prodotto) per ogni $x, y \in F$*

$$x \cdot y = y \cdot x$$

5. *(Distributività del prodotto rispetto alla somma) per ogni $x, y, z \in F$*
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Se le operazioni e i rispettivi elementi neutri sono famigliari, si usa anche dire che F è un campo. Quindi, ad esempio, diciamo che $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sono dei campi, e non c'è bisogno di dire esplicitamente "$(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ è un campo" invece di "$\mathbb{Q}$ è un campo".

4.1 Esempi di campi

Oltre ai campi numerici $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ci sono diversi altri campi di uso più o meno comune in matematica. Il primo esempio è decisamente banale, ma divertente.

Esempio 4.3 (Il campo banale) *Consideriamo $\{e\}$, un insieme con un solo elemento, e definiamo le operazioni in questo modo:*

$$e + e = e \cdot e = e$$

È semplice verificare che $(\{e\}, +, \cdot, e, e)$ è un campo (♠). Questo è il campo più piccolo possibile: tutti gli altri campi hanno almeno due elementi. Questo è anche l'unico campo in cui la somma ed il prodotto coincidono (♠), ed è interessante cercare di scoprire il perchè.

I campi discussi nel prossimo esempio sono molto rilevanti per la teoria dei numeri e la crittografia.

Esempio 4.4 (Campi finiti) *Sia $p \in \mathbb{N}$ un numero primo. Si può dimostrare che $\mathbb{Z}_p$ come definito nell'esempio 3.2 è un campo (♠)*[‡]*. I campi della forma $\mathbb{Z}_p$ si chiamano* campi finiti*, perchè hanno un numero finito di elementi.*

Esempio 4.5 (♡ – Un'estensione di $\mathbb{R}$) *In questo esempio costruiremo un campo che estende il campo dei numeri reali. Prendiamo $\alpha \notin \mathbb{R}$ (possiamo pensare ad α come a un simbolo per un "nuovo numero") e definiamo l'insieme*

$$R(\alpha) = \{p(\alpha)/q(\alpha) \mid p, q \in \mathbb{R}[x] \text{ e } q \neq 0\}$$

In altre parole, un generico oggetto di $R(\alpha)$ è un quoziente di polinomi "valutato" in α. Dato che i polinomi costanti sono elementi di $\mathbb{R}[x]$, è interessante osservare esplicitamente che $R(\alpha)$ contiene tutti i numeri reali, oltre a nuovi oggetti tra i quali ad esempio

$$\alpha \ ; \ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha - 1} \ ; \ -8\alpha + 12 - \alpha^{-57}$$

Tecnicamente, a questo punto è necessario definire su $R(\alpha)$ la relazione

$$\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} \simeq \frac{r(\alpha)}{s(\alpha)} \iff p(\alpha)s(\alpha) = q(\alpha)r(\alpha)$$

Questa relazione è analoga a quella definita sull'insieme delle frazioni di numeri interi per ottenere il campo dei numeri razionali. Infatti, si verifica che $\simeq$ è una relazione di equivalenza *(♠). Chiamiamo $\mathbb{R}(\alpha)$ l'insieme delle classi di equivalenza di questa relazione:*

$$\mathbb{R}(\alpha) = R(\alpha)/\simeq$$

I suoi elementi sono quozienti di polinomi coprimi (i.e. senza fattori comuni). In altre parole, se $p(\alpha)/q(\alpha) \in \mathbb{R}(\alpha)$, allora non esiste nessun polinomio $h(\alpha) \neq 1$ in $\mathbb{R}[\alpha]$ che soddisfa

$$p(\alpha) = h(\alpha)p'(\alpha) \quad \text{e} \quad q(\alpha) = h(\alpha)q'(\alpha)$$

[‡]Sappiamo già che $\mathbb{Z}_p$ è un anello commutativo. Per dimostrare che è un campo è sufficiente dimostrare che ogni elemento ha un inverso moltiplicativo.

per qualche p' *e* $q' \in \mathbb{R}[\alpha]$[§]*. Ad esempio, gli oggetti seguenti appartengono a* $\mathbb{R}(\alpha)$*:*

$$1 \ ; \ 57 \ ; \ 57\alpha^9 \ ; \ \frac{57\alpha^9 - 2\alpha^7 + \pi}{\alpha - 7} \ ; \ -\alpha^{-2}$$

mentre invece

$$\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha - 1}$$

è un elemento $R(\alpha)$ *che non appartiene a* $\mathbb{R}(\alpha)$*. Dato che*

$$\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha - 1} \simeq \alpha + 1$$

e $\alpha + 1$ *è "ridotto ai minimi termini", deduciamo che* $\alpha + 1$ rappresenta $(\alpha^2 - 1)/(\alpha - 1)$ *in* $\mathbb{R}(\alpha)$ *(analogamente a come* 2 rappresenta 197252/9876 *in* $\mathbb{Q}$*).*

Su $\mathbb{R}(\alpha)$ *possiamo definire le operazioni di somma e prodotto in analogia alla somma e prodotto tra quozienti di polinomi. Quindi, valgono le similitudini*

$$\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} \cdot \frac{r(\alpha)}{s(\alpha)} \simeq \frac{p(\alpha)r(\alpha)}{q(\alpha)s(\alpha)}$$

e

$$\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} + \frac{r(\alpha)}{s(\alpha)} \simeq \frac{p(\alpha)s(\alpha) + r(\alpha)q(\alpha)}{q(\alpha)s(\alpha)}$$

Ad esempio,

$$57 + \frac{57\alpha^9 + \pi}{\alpha^2} - \alpha^{-2} = \frac{57\alpha^9 + 57\alpha^2 - 1 + \pi}{\alpha^2}$$

Con queste operazioni si può verificare che 0 *è l'elemento neutro per la somma,* 1 *è l'elemento neutro per il prodotto,*

$$-\left(\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}\right) = \frac{-p(\alpha)}{q(\alpha)}$$

e, se $p(\alpha) \neq 0$*, allora*

$$\left(\frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}\right)^{-1} = \frac{q(\alpha)}{p(\alpha)}$$

Quindi $(\mathbb{R}(\alpha), +, \cdot, 0, 1)$ *è un campo.*

[§]Attenzione: la differenza tra $\mathbb{R}(\alpha)$ e $\mathbb{R}[\alpha]$ qui gioca un ruolo cruciale.

A Applicazioni

Questa appendice contiene qualche cenno su alcune applicazioni non strettamente matematiche delle strutture algebriche presentate in queste note. Gli esempi non hanno alcuna pretesa di completezza: ci sono sicuramente molte più applicazioni di quelle che siamo riusciti a raccogliere in queste pagine.

A.1 Gruppi

L'"applicazione" più evidente della teoria dei gruppi alla geometria è nella definizione di spazio vettoriale.

Esempio A.1 (Spazi vettoriali) *Uno spazio vettoriale V su un campo k è innanzitutto un gruppo abeliano, sul quale poi è definita anche un'operazione di prodotto scalare che è compatibile con le operazioni di gruppo. La struttura di gruppo su V esprime in modo matematico l'idea informale che la somma tra vettori è sempre definita, è associativa, commutativa, ha un elemento neutro, ed è invertibile.*

I gruppi però hanno applicazioni anche al di fuori della matematica.

Esempio A.2 (Gruppi di simmetrie) *La teoria dei gruppi funziona molto bene per descrivere insiemi di simmetrie, e per questo è particolarmente usata nello studio dei reticoli cristallini. Ad esempio, ci sono dei teoremi interessanti sui possibili piastrellamenti infiniti del piano, sulle forme ammissibili per i cristalli[¶] e sulle simmetrie delle molecole.*

Se provate ad effettuare su google una ricerca come "groups physics", trovate una marea di articoli e di dispense di corsi universitari che parlano delle applicazioni della teoria dei gruppi alla fisica. Uno degli esempi più rilevanti è quello dei gruppi di Lie.

Esempio A.3 (Gruppi di Lie) *I gruppi di Lie sono degli insiemi che, oltre alla struttura di gruppo, hanno anche una struttura geometrica particolarmente ricca[‖] compatibile con le operazioni di gruppo. I gruppi di Lie sono un ottimo strumento matematico per descrivere un oggetto che ha infinite simmetrie, e le cui simmetrie hanno qualche proprietà di continuità.*

[¶] Sì, le rocce.

[‖] Per i curiosi: sono una varietà differenziabile, cioè in qualche modo ci si può fare sopra dell'analisi.

*Ad esempio, l'insieme delle trasformazioni che mandano una circonferenza centrata nell'origine in sè stessa contengono tutte le rotazioni di angoli arbitrariamente piccoli. L'insieme di queste rotazioni (che è infinito) è un gruppo (♠)**, ed è un esempio di gruppo di Lie.*

I gruppi di Lie possono essere usati per descrivere le simmetrie di equazioni differenziali, oppure per descrivere le simmetrie di alcuni sistemi fisici, tipicamente della meccanica quantistica.

A.2 Anelli

Sorprendentemente, uno degli anelli con più applicazioni è quello dei quaternioni di Hamilton, che non è commutativo.

Esempio A.4 (I quaternioni di Hamilton) *Come già accennato nell'esempio 3.3, oltre ad essere rilevanti per la matematica i quaternioni di Hamilton hanno applicazioni anche in computer grafica e in fisica.*

I quaternioni, ad esempio, possono essere usati per descrivere le rotazioni nello spazio tridimensionale. In informatica, questa descrizione permette di ridurre drasticamente l'uso della memoria rispetto alla descrizione delle rotazioni mediante matrici. Infatti per descrivere una rotazione nello spazio con un quaternione sono sufficienti i 4 coefficienti di 1*,* i*,* j*,* k*, mentre per descrivere la stessa rotazione con una matrice se ne usano 9. Inoltre, il prodotto tra quaternioni è computazionalmente più veloce di quello tra matrici.*

Per una discussione più approfondita sull'uso dei quaternioni in informatica e per altre applicazioni alla fisica, suggerisco di dare un'occhiata alla pagina web `http://www.zipcon.net/~swhite/docs/math/quaternions/applications.html` (in inglese).

A.3 Campi

L'applicazione più diffusa e meno osservata dei campi è quella di fornire un ambiente numerico nel quale eseguire in libertà le operazioni. Oggi la

**È sufficiente dimostrare che:

- la composizione di rotazioni centrate nell'origine è ancora una rotazione centrata nell'origine;
- la composizione di rotazioni ha un elemento neutro;
- ogni rotazione ha un'inversa rispetto alla composizione.

possibilità di sottrarre e dividere numeri tra loro ci sembra così ovvia da non essere degna di nota, eppure non è sempre stato così. Se ai tempi di Tartaglia fossimo usciti insieme a prendere una pizza, avremmo fatto una certa fatica nel pagare alla romana!

I campi hanno applicazioni molto più profonde rispetto alla possibilità di eseguire le operazioni, e quasi altrettanto rivoluzionarie. Si potrebbero discutere molti esempi (come le algebre di Boole, i bitcoin, i codici a correzione di errore), ma preferiamo concludere con quello che probabilmente è il più spettacolare.

Esempio A.5 (Crittografia) *Fin dall'antichità, l'esigenza di inviare messaggi in modo sicuro, cioè in modo che solo il legittimo destinatario potesse leggerli, è stata fondamentale nella politica e nella diplomazia. Con una descrizione moderna, possiamo descrivere il problema immaginando che Alice e Bob, amici da lungo tempo, siano distanti e vogliano comunicare in modo che la loro arci-nemica Eva non riesca a decifrare i loro messaggi. Eva, però, riesce sempre a ottenere una copia dei messaggi, e conosce l'algoritmo con il quale Alice e Bob li hanno cifrati. L'unica cosa che Eva non conosce è la chiave di cifratura dei messaggi.*

Sotto queste ipotesi (che sono le ipotesi di lavoro della crittografia moderna), sembra che sia solo una questione di tempo prima che i messaggi segreti di Alice e Bob vengano decifrati da Eva.

Eppure, grazie ai campi finiti e agli anelli finiti, sono stati sviluppati dei metodi di cifratura che mettono Eva in grosso svantaggio. L'idea è la seguente: nell'aritmetica modulare (quella degli anelli e dei campi finiti discussa nell'esempio 3.2) , esistono delle operazioni facili da eseguire ma difficili[††] *da invertire. Ad esempio, dati a ed $e \in \mathbb{Z}_p$, è molto semplice calcolare $a^e \mod p$, ma è difficile ricavare a a partire da $a^e \mod p$ senza conoscere l'inverso di e*[‡‡]*. Tutto questo si complica ulteriormente se a ed e sono elementi di $\mathbb{Z}_n$ con n composto*[*]*: in questo caso, è ancora più difficile calcolare gli inversi moltiplicativi, dato che non tutti i numeri sono invertibili. Se interpretiamo a come il messaggio cifrato che Alice vuole inviare a Bob ed e come la chiave di cifratura, è Eva a trovarsi in grossa difficoltà.*

Questo esempio è una semplificazione molto approssimativa degli algoritmi di cifratura basati sui campi finiti. Gli studenti interessati possono trovare questo e molti altri esempi trattati in modo esaustivo ad esempio

[††] Dove "facile" e "difficile" sono concetti ben definiti della teoria della calcolabilità.

[‡‡] Se invece conosciamo $1/e$, possiamo facilmente ricavare a. Infatti, per le proprietà delle potenze, $(a^e)^{1/e} = a^{e/e} = a$.

[*] Inoltre a, e e n sono circa dell'ordine di grandezza di 10^{1000}.

nelle dispense di crittografia di Sandro Mattarei: `http://www.science.unitn.it/~mattarei/Didattica/Numeri/07-08/Note/Num_Crit.pdf`.

Una nota finale: abbiamo raccontato la fiaba di Alice e Bob che vogliono comunicare tra loro, ma questa fiaba si applica a ciascuno di noi ogni volta che eseguiamo un acquisto online, ogni volta che effettuiamo il login alla nostra mail, ogni volta che inviamo informazioni ad un sito internet o ogni volta che preleviamo con il bancomat. Il mondo è pieno di Alice e Bob: è solo un bene che Eva non abbia vita facile.

Riferimenti bibliografici

[1] I.N. Herstein (2003), *Algebra*, Editori Riuniti.

[2] R. Schoof e L. van Geemen (2001), *Algebra*, reperibile alla pagina `http://www-dimat.unipv.it/canonaco/notealgebra.pdf`

[3] Kiryl Tsishchanka (2003), *Groups, basic definitions and examples*, reperibile alla pagina `http://cims.nyu.edu/~kiryl/teaching/aa/review2.pdf`