Spazi vettoriali di dimensione infinita e basi: due esempi

Emanuele Bottazzi*

Versione aggiornata al 2 novembre 2015†

Indice

1 Introduzione

Queste note discutono brevemente due esempi interessanti di spazi vettoriali di dimensione infinita, con particolare attenzione al problema dell'esistenza di una base per questi spazi. Il primo esempio è cosituito dallo lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali. Per questo spazio, possiamo scrivere esplicitamente una base (infinita). Il secondo esempio è lo spazio vettoriale delle successioni reali: anche questo è uno spazio vettoriale di dimensione infinita, ma in questo caso non è possibile scrivere esplicitamente una base

*Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Trento, emanuele.bottazzi@unitn.it.

†Eventuali versioni successive sono reperibili alla pagina `http://www.science.unitn.it/~bottazzi/geometria1516.html`.

infinita. In effetti, una base per questo spazio vettoriale può essere ricavata solamente a partire da una grossa ipotesi matematica.

Tutto il contenuto di queste note è opzionale e non costituisce materia d'esame. Di conseguenza, i lettori sono incoraggiati a saltare le parti che non ritengono utili, interessanti o comprensibili.

Alcune piccole avvertenze prima di cominciare:

- il simbolo ♡ denota dei contenuti complessi*. I lettori non si vergognino qualora sentissero una irresistibile tentazione ad ometterne la lettura.
- Le affermazioni seguite dal simbolo (♠) sono vere ma non ovvie, quindi andrebbero dimostrate.
- È quasi certo che queste note contengano diversi errori. Se ne trovaste qualcuno, vi chiederei di segnalarmelo con una mail all'indirizzo `emanuele.bottazzi@unitn.it`, così che lo possa correggere.
- $0 \in \mathbb{N}$.

2 Lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali

Possiamo definire un polinomio a coefficienti reali come una somma finita

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0{}^{\dagger}$$

con $a_i \in \mathbb{R}$ per $i = 0, \ldots, n$ e dove x è un simbolo‡. Un polinomio p può essere pensato anche come una funzione definita dalla formula

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + r_1 x + r_0$$

per ogni $r \in \mathbb{R}$.

Chiamiamo $\mathbb{R}[x] = \{p : p \text{ è un polinomio a coefficienti reali}\}$.

È ben definita una somma tra polinomi: se

$$\begin{aligned} p &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ q &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

*Secondo un qualche criterio arbitrario di complessità.

†Che spesso scriveremo con la notazione $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

‡È importante evidenziare che la somma è finita e non compaiono potenze negative o frazionarie del simbolo x.

e se $n \leq m$, allora

$$\begin{aligned} p+q &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_{n+1}x^{n+1} + \\ &\quad +(a_n+b_n)x^n + (a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1} \ldots + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0) \end{aligned}$$

Non è difficile dimostrare che $\mathbb{R}[x]$ con la somma definita qui sopra è un gruppo. L'elemento neutro è il polinomio nullo, che indicheremo con 0.

Lemma 2.1 (♠). *$(\mathbb{R}[x], 0, +)$ è un gruppo abeliano.*

Possiamo definire un prodotto $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ in questo modo: se $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, allora

$$r \cdot p = \sum_{i=0}^n (ra_i)x^i.$$

Lemma 2.2 (♠). *Con il prodotto scalare definito sopra, $(\mathbb{R}[x], 0, +)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.*

2.1 I sottospazi vettoriali dei polinomi di grado non superiore a n

Ad ogni polinomio p è associato un numero, chiamato il grado di p, definito in questo modo: se $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ e $a_n \neq 0$, allora il grado di p è n.

Il grado di p di solito si indica con $\deg(p)$. Quindi ad esempio $\deg(x^2 + x + 1) = 2$ e $\deg(x^{159} + 127x^{57} - 449) = 159$.

Una proprietà fondamentale del grado è che il grado della somma di due polinomi non è superiore al grado massimo dei polinomi di partenza. Più precisamente (e forse anche più esplicitamente) vale il

Lemma 2.3 (♠). *Siano $p, q \in \mathbb{R}[x]$. Allora $\deg(p+q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}$.*

Da questo lemma, deduciamo direttamente che la somma di due polinomi di grado non maggiore di n è ancora un polinomio di grado non maggiore di n.

Corollario 2.4. *Sia $n \in \mathbb{N}$ e siano $p, q \in \mathbb{R}[x]$. Se $\deg(p) \leq n$ e $\deg(q) \leq n$, allora $\deg(p+q) \leq n$.*

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo $\mathbb{R}[x]_n = \{p : p$ è un polinomio a coefficienti reali con $\deg(p) \leq n\}$. Grazie alle proprietà del grado dei polinomi viste sopra, si può dimostrare che

Lemma 2.5 (♠). *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}[x]_n, 0, +)$ è un sottospazio vettoriale di $(\mathbb{R}[x], 0, +)$.*

Idea della dimostrazione. $0 \in \mathbb{R}[x]_n$ perchè $\deg(0) = 0 \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

La somma tra polinomi è interna per il corollario 2.4, e $\mathbb{R}[x]_n$ è chiuso rispetto al prodotto scalare perchè $\deg(kp) = \deg(p)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}[x]$. $\square$

Intuitivamente, i sottospazi $\mathbb{R}[x]_n$ hanno dimensione finita. A partire da questa intuizione, vogliamo cercare una base per $\mathbb{R}[x]_n$. Iniziamo ad osservare che $p \in \mathbb{R}[x]_n$ si può scrivere come $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$[§]. Questa scrittura non è altro che una combinazione lineare[¶] degli elementi $x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1$. In particolare, $\mathcal{B}_n = \{x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1\}$ è un insieme di generatori per $\mathbb{R}[x]_n$.

In realtà, si può anche dimostrare che gli elementi di $\mathcal{B}_n$ sono linearmente indipendenti. La dimostrazione si basa sul seguente lemma:

Lemma 2.6. *Sia* $p = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$. *Allora* $p = 0$ *se e solo se* $a_i = 0$ *per ogni* $i = 0, \ldots, n$.

Dimostrazione (♡). L'implicazione da destra verso sinistra è ovvia. L'implicazione da sinistra verso destra non viene dimostrata da nessuno, perchè è una di quelle affermazioni talmente banali da essere difficili da dimostrare. La dimostriamo per induzione su $n = \deg(p)$.

Se $\deg(p) = 0$, allora p è il polinomio costante a_0, ed è uguale a 0 se e solo se $a_0 = 0$. Questo dimostra la base dell'induzione.

Supponiamo adesso che la tesi sia vera per ogni $p \in \mathbb{R}[x]_n$, e dimostriamo che è vera anche per $p \in \mathbb{R}[x]_{n+1}$. Effettuiamo la dimostrazione del passo induttivo per contronominale, cioè dimostriamo che se $p = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^i$ con $a_i \neq 0$ per almeno un i, allora $p \neq 0$. Per dimostrare $p \neq 0$ è sufficiente dimostrare che esiste $\star \in \mathbb{R}$ che soddisfa $p(\star) \neq 0$.

Sia dunque $p = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^i$ con $a_i \neq 0$ per almeno un i. Prendiamo ora $r \in \mathbb{R}$: se $p(r) \neq 0$, allora p non è il polinomio nullo, come volevamo. Altrimenti, se $p(r) = 0$, per la regola di Ruffini possiamo scrivere $p = (x - r)q$, dove q è un polinomio con $\deg(q) = (n + 1) - 1 = n$. Per q vale quindi l'ipotesi induttiva, cioè che $q = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = 0$ se e solo se $b_i = 0$ per ogni $i = 0, \ldots, n$.

Procediamo per casi: se $q = 0$, deduciamo che $b_i = 0$ per ogni $i = 0, \ldots, n$ (grazie all'ipotesi induttiva) e, svolgendo i conti, otteniamo che anche $a_i = 0$ per ogni $i = 0, \ldots, n+1$. Ma noi avevamo supposto che $a_i \neq 0$ per almeno un i, quindi $q \neq 0$. In particolare, esiste $r_1 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r$, per cui $q(r_1) = R \neq 0$. A questo punto, valutiamo $p(r_1) = (r_1 - r)R \neq 0$, e concludiamo che $p \neq 0$.

[§]Ricordiamo che un numero qualsiasi dei coefficienti a_n può essere uguale a 0.

[¶]Altro promemoria: le combinazioni lineari per definizione sono finite.

Questo conclude la dimostrazione del passo induttivo, e quindi della dimostrazione per induzione. Di conseguenza, anche l'implicazione da sinistra verso destra è vera. $\square$

Corollario 2.7. *$\mathcal{B}_n$ è una base di $\mathbb{R}[x]_n$.*

Dimostrazione. Abbiamo visto che $\mathcal{B}_n$ è un insieme di generatori per $\mathbb{R}[x]_n$, e nel lemma precedente abbiamo dimostrato che gli elementi di $\mathcal{B}_n$ sono linearmente indipendenti. $\square$

A partire dal corollario qui sopra, deduciamo che gli spazi $\mathbb{R}[x]_n$ al variare di n sono contenuti uno dentro l'altro.

Corollario 2.8. *Se $n < m$, allora $\mathbb{R}[x]_n \subset \mathbb{R}[x]_m$.*

Dimostrazione. È sufficiente osservare che se $n < m$ allora $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_m$. $\square$

2.2 Una base per $\mathbb{R}[x]$

Una caratteristica fondamentale di $\mathbb{R}[x]$ è che $\mathbb{R}[x] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}[x]_n$. In altre parole, vale il seguente

Lemma 2.9. *Per ogni $p \in \mathbb{R}[x]$, esiste un unico $n_p \in \mathbb{N}$ che soddisfa*

- *$p \in \mathbb{R}[x]_m$ per ogni $m \geq n_p$ e*
- *$p \notin \mathbb{R}[x]_m$ per ogni $m < n_p$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che $n_p = \deg(p)$ ha le proprietà desiderate.

Inannzitutto, $p \in \mathbb{R}[x]_{\deg(p)}$ per definizione di grado di p. Inoltre, abbiamo discusso alla fine della sezione precedente che se $\deg(p) < m$ allora è vera l'inclusione $\mathbb{R}[x]_{\deg(p)} \subset \mathbb{R}[x]_m$.

Ci resta da dimostrare che se $m < \deg(p)$ allora $p \notin \mathbb{R}[x]_m$. Per definizione, $\mathbb{R}[x]_m = \{q : q \in \mathbb{R}[x] \text{ e } \deg(q) \leq m < \deg(p)\}$. Dato che $\deg(p) \not< \deg(p)$, $\deg(p) \not\leq m$. Quindi $p \notin \mathbb{R}[x]_m$. $\square$

Questa proprietà si può riscrivere in modo equivalente come:

Corollario 2.10. *Sia $p \in \mathbb{R}[x]$. Allora $p \in \mathbb{R}[x]_{\deg(p)}$.*

A partire da questa considerazione, possiamo dimostrare che $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ è una base di $\mathbb{R}[x]$.

Teorema 2.11. *$\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ è una base di $\mathbb{R}[x]$.*

Dimostrazione ($\heartsuit$). Dimostriamo che $\mathcal{B}$ genera $\mathbb{R}[x]$. Sia $p \in \mathbb{R}[x]$: per il corollario precedente, $p \in \mathbb{R}[x]_{\deg(p)}$, i.e. $p \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\deg(p)})$. Dato che $\mathcal{B}_{\deg(p)} \subset \mathcal{B}$, $p \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Quindi $\mathcal{B}$ genera $\mathbb{R}[x]$.

Dimostriamo ora che i vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti tra loro. Siano dunque $x^{i_1}, \ldots, x^{i_n} \in \mathcal{B}$, con $i_1, \ldots, i_n$ tutti distinti (questa ultima ipotesi ci assicura che anche $x^{i_1}, \ldots, x^{i_n}$ sono tutti distinti). Sia $N = \max_{j=1,\ldots,n}\{i_j\}$: N è l'esponente massimo di $x^{i_1}, \ldots, x^{i_n}$. Quindi per definizione di N abbiamo $x^{i_1}, \ldots, x^{i_n} \in \mathcal{B}_N$. Ora $x^{i_1}, \ldots, x^{i_n}$ sono elementi distinti di $\mathcal{B}_N$ e, dato che $\mathcal{B}_N$ è una base, deduciamo che sono linearmente indipendenti.

Abbiamo dimostrato che $\mathcal{B}$ genera $\mathbb{R}[x]$ e che i vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti, quindi possiamo concludere che $\mathcal{B}$ è una base per $\mathbb{R}[x]$. $\square$

È semplice dedurre che $\mathcal{B}$ ha infiniti elementi. Per definizione di dimensione di uno spazio vettoriale, $\mathbb{R}[x]$ ha dimensione infinita.

3 Lo spazio vettoriale delle successioni a valori reali

Una successione a valori reali è una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Se scegliamo di definire $f_i = f(i)$, la funzione f si può scrivere anche come $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Chiamiamo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$.

È ben definita una somma tra successioni: per $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definiamo $f + g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mediante la formula

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n).$$

Con questa somma, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ è un gruppo abeliano. L'elemento neutro c_0 è la funzione identicamente uguale a 0: $c_0(n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 3.1 ($\spadesuit$). $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, c_0, +)$ *è un gruppo abeliano.*

Possiamo definire un prodotto $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ in questo modo:

$$(r \cdot f)(n) = r \cdot f(n).$$

Lemma 3.2 ($\spadesuit$). *Con il prodotto scalare definito sopra,* $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, c_0, +)$ *è uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$.

3.1 Il sottospazio vettoriale delle successioni eventualmente nulle

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo le funzioni $\chi_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ponendo

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & se\ x = n \\ 0 & se\ x \neq n \end{cases}$$

Con un po' di lavoro, si riesce a dimostrare che ogni funzione $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ si può scrivere in modo unico come

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \chi_i \tag{3.1}$$

dove in particolare $a_i = f(i)$. In generale, la formula 3.1 non è una combinazione lineare delle χ_n, dato che le combinazioni lineari sono somme finite mentre la 3.1 può essere infinita.

Cerchiamo di capire come sono fatte le combinazioni lineari delle χ_n. In analogia a come abbiamo fatto nella sezione precedente per i polinomi, definiamo $\mathcal{C}_n = \{\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n\}$ e $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : f(m) = 0$ per ogni $m > n\}$. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$ è il sottospazio vettoriale delle successioni che sono nulle da $n+1$ in poi.

Possiamo dimostrare che $\mathcal{C}_n$ è una base di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$. Iniziamo a dimostrare che $\mathcal{C}_n$ genera $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$.

Lemma 3.3. *$\mathcal{C}_n$ genera $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$.*

Dimostrazione. Sia $g = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_i$ (i.e. $g \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_n)$), e sia $m > n$. Calcoliamo

$$g(m) = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_i(m).$$

Ora, dato che $0 \leq i \leq n < m$, $\chi_i(m) = 0$ per ciascuno di questi i, da cui deduciamo $g(m) = 0$. Quindi se $g \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_n)$ allora $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$, cioè $\mathcal{L}(\mathcal{C}_n) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$.

Dobbiamo dimostrare l'altra inclusione, cioè che se $g(n) = 0$ per ogni $m > n$, allora possiamo scrivere g come combinazione lineare di $\chi_0, \dots, \chi_n$. Ma è facile verificare che, in analogia con la formula 3.1, vale

$$g = \sum_{i=0}^{n} g(i) \chi_i.$$

Questo ci basta per concludere che $\mathcal{L}(\mathcal{C}_n) \supseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$, da cui deduciamo che vale l'uguaglianza desiderata. $\square$

Grazie al lemma precedente, è facile dimostrare che $\mathcal{C}_n$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Lemma 3.4. *$\mathcal{C}_n$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Supponiamo che $g = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_i = 0$. In particolare, questo vuol dire che $g(j) = 0$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Dal lemma precedente sappiamo che questo è vero per ogni $j > n$. Per $j = 0, \ldots, n$, otteniamo

$$g(j) = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_i(j) = a_j.$$

Quindi $g = 0$ se e solo se $a_i = 0$ per ogni $i = 0, \ldots, n$. Questo conclude la dimostrazione che $\mathcal{C}_n$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti. □

Mettendo insieme i due lemmi precedenti, otteniamo il

Corollario 3.5. *$\mathcal{C}_n$ è una base di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$.*

Definiamo $\mathcal{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ e $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_n$. In analogia con quanto succedeva per i polinomi, possiamo dimostrare che $\mathcal{C}$ è una base per $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_c$.

Proposizione 3.6. *$\mathcal{C}$ è una base di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_c$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è sostanzialmente uguale a quella del teorema 2.11 (♠). □

A questo punto, l'analogia con i polinomi si rompe. Infatti, a differenza di quanto succedeva per i polinomi, nel caso delle successioni reali vale la disuguaglianza $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_c \neq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Infatti, il sottospazio vettoriale $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_c$ contiene le funzioni che sono nulle da un certo punto in poi (in matematica si dice che queste successioni sono "eventualmente nulle") (♠). Il motivo per cui $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_c$ non è uguale a tutto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ è che in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ esistono delle funzioni che non sono mai nulle (ad esempio le costanti). Questo semplice ragionamento dimostra che $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_c \neq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3.2 Isomorfismo tra $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_c$ e $\mathbb{R}[x]$

Si può dimostrare che gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_c$ e $\mathbb{R}[x]$ sono isomorfi (cioè esiste una biezione lineare tra i due spazi).

Teorema 3.7. *La funzione $F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}_c \to \mathbb{R}[x]$ definita da*

$$F\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \chi_i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali (sul campo $\mathbb{R}$).

Dimostrazione. Verifichiamo che F è lineare. Abbiamo la catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} F\left(\alpha\sum_{i=0}^{n} a_i\chi_i + \beta\sum_{j=0}^{m} b_j\chi_j\right) &= \alpha\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \beta\sum_{j=0}^{m} b_j x^j \\ &= \alpha F\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\chi_i\right) + \beta F\left(\sum_{j=0}^{m} b_j\chi_j\right) \end{aligned}$$

dove ad ogni uguaglianza abbiamo usato la definizione di F. Deduciamo che F è lineare.

Per concludere la dimostrazione che F è un isomorfismo, dobbiamo verificare che F è suriettiva ed iniettiva.

Iniziamo con la suriettività: dato $v \in \mathbb{R}[x]$, mostriamo che esiste un $w \in \mathbb{R}_c^{\mathbb{N}}$ tale che $F(w) = v$. Per quanto visto nella sezione precedente, $v \in \mathbb{R}[x]$ si può scrivere come $v = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. È semplice verificare che, se definiamo $w = \sum_{i=0}^{n} a_i\chi_i$, allora $w \in \mathbb{R}_c^{\mathbb{N}}$ e $F(w) = v$.

Verifichiamo ora che F è iniettiva. Sia $\sum_{i=0}^{n} a_i\chi_i \in \mathbb{R}_c^{\mathbb{N}}$ tale che $F\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\chi_i\right) = 0$. Questo vuol dire che

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

ma, dato che i vettori $1, x^1, \ldots, x^n$ sono linearmente indipendenti, questo implica $a_i = 0$ per ogni $i = 0, \ldots, n$. Di conseguenza anche $\sum_{i=0}^{n} a_i\chi_i = 0$, cioè F è iniettiva. □

3.3 Una base per $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? (♡)

Nelle sezioni precedenti abbiamo provato a cercare una base per $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ma non siamo riusciti a trovarla. Eppure, aver fallito nel tentativo di trovare la soluzione ad un problema non implica che il problema sia irrisolubile. Purtroppo, non esiste un modo semplice per dimostrare che è impossibile scrivere esplicitamente una base per $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, e questo è vero per una moltitudine di spazi vettoriali di dimensione infinita.

Infatti, il problema dell'esistenza di una base per uno spazio vettoriale di dimensione infinita spesso non riguarda la geometria o l'algebra lineare, ma i fondamenti della matematica. In particolare, il problema dell'esistenza di una base per ogni spazio vettorile è intimamente connesso con l'*assioma della scelta*, un principio matematico che non può essere nè dimostrato nè confutato in ZF o in ogni altra teoria degli insiemi accettata dalla quasi totalità dei matematici. L'assioma della scelta è equivalente a un certo numero di affermazioni matematiche, tra cui quella che ogni spazio vettoriale ha una base.

Nel caso particolare dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, si può dimostrare che

1. se vale l'assioma della scelta, allora $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ha una base (e quindi ne ha infinite);

2. se non vale l'assioma della scelta, allora $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ può non avere una base.

Per gli studenti che desiderano approfondire l'assioma della scelta e alcune sue conseguenze importanti per la pratica matematica, suggerisco di dare un'occhiata a [2]. Il testo è in inglese ed è un po' tecnico, ma potrebbe dare una prima idea delle vaste implicazioni di questo principio matematico.

Un'introduzione più accessibile è reperibile all'indirizzo `http://www.math.vanderbilt.edu/~schectex/ccc/choice.html`. In questa pagina gli studenti interessati possono trovare numerosi collegamenti e spunti di approfondimento.

Per ulteriori spunti di riflessione sugli spazi vettoriali di dimensione infinita, suggerisco di consultare [1], anche se il testo, per la natura degli argomenti trattati, è impegnativo.

Riferimenti bibliografici

[1] Lior Silberman, *Note on infinite-dimensional vector spaces*, reperibile alla pagina `https://www.math.ubc.ca/~lior/teaching/1314/412_W14/Notes/InfiniteDimensions.pdf`

[2] Kevin Barnum, *The axiom of choice and its implications*, reperibile alla pagina `http://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Barnum.pdf`