Esercizio 0.1. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -6 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \\ 2 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Determinare, se esistono, una base ortonormale β e una base ortonormale β' in modo tale che A_β e $B_{\beta'}$ siano diagonali.

Esercizio 0.2. Sia Q la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ data da

$$Q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + yz$$

- Determinare la matrice A che soddisfa $Q(x, y, z) = (x, y, z)^T A(x, y, z)$ (rispetto alla base canonica).
- Determinare una base ortonormale β rispetto alla quale la matrice A_β è diagonale.
- Aiutandosi con il teorema degli assi principali, classificare la quadrica $Q(x, y, z) = 5$.
- Facoltativo: determinare l'intersezione della quadrica $Q(x, y, z) = 5$ con il piano π di equazioni cartesiane $x = 0$.

Esercizio 0.3. Sia Q la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ data da

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$$

- Determinare la matrice A che soddisfa $Q(x, y, z) = (x, y, z)^T A(x, y, z)$ (rispetto alla base canonica).
- Determinare una base ortonormale β rispetto alla quale la matrice A_β è diagonale.
- Aiutandosi con il teorema degli assi principali, disegnare la quadrica $Q(x, y, z) = 2$ rispetto alla base canonica.

Esercizio 0.4 (Esercizio 13.10 dott.ssa Carrara)**.** Per $k \in \mathbb{R}$, sia C_k la conica di equazione

$$C_k : x^2 + (k - 2)xy + y^2 - 4 = 0$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, classificare la conica C_k.

Esercizio 0.5. Per $k \in \mathbb{R}$, sia Q_k la quadrica definita da

$$Q_k : (1 + 2k)x^2 + y^2 + z^2 + 2kyz = 1 + k$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, classificare la quadrica Q_k.