Ciascuno dei seguenti esercizi è pensato per mettere in luce alcune proprietà del determinante. Può essere utile dapprima svolgere i conti e poi riflettere sulle proprietà evidenziate.

Esercizio 0.1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 17 & 10 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 0.2. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 8 & 4 & 12 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 8 & 12 \\ 8 & 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 0.3. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soluzioni. Per verificare i calcoli, si può inserire ogni matrice in maxima e usare il comando “determinant”. □

Osservazione. Da questi esercizi, possiamo osservare che:

- scambiando due righe di una matrice il determinante cambia di segno (e, più in generale, se effettuiamo k scambi, il determinante viene moltiplicato per $(-1)^k$);
- moltiplicando una riga per un numero $r \in \mathbb{R}$, il determinante viene moltiplicato di r;
- per $a, A, b, B, c, d \in \mathbb{R}$, vale la formula (da capire, prima ancora che da mettere in pratica)

  $$det \begin{pmatrix} a+A & b+B \\ c & d \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} A & B \\ c & d \end{pmatrix},$$

  e la stessa formula si generalizza a matrici di dimensione arbitraria;
- il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale.

In particolare, queste proprietà rendono possibile il calcolo del determinante di una matrice mediante riduzione di Gauss.

Esercizio 0.4. Calcolare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ il determinante della matrice

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

è nullo.