Esercizio 0.1. Quante applicazioni lineari $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ soddisfano $L(e_1) = (1, 2, 1)$, $L(e_2) = (4, 0, 1)$?

- Esplicitare $L(x, y)$, per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- Determinare se L è iniettiva o suriettiva.
- Determinare se i vettori $(0, 0, 0)$, $(3, 4, 1)$, $(3, -2, 0)$ appartengono a $\mathrm{im}(L)$.

Esercizio 0.2. Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ definita da

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_2, x_2 + 3x_3, -2x_1).$$

- Determinare se L è lineare.
- Determinare se L è iniettiva o suriettiva.
- Determinare una base di $\ker(L)$ e di $\mathrm{im}(L)$.
- Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(k, 2, 1-k, 4, -2)$ appartiene a $\mathrm{im}(L)$.

Esercizio 0.3. Sia $T_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T_k(x, y) = (kx + 4y, x + ky, y)$. Determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ se T_k è iniettiva o suriettiva.

Esercizio 0.4. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + z - 2t, 2x + 4y + 2z + 4t, 4x + 8y + 4z, -t).$$

- Determinare se f è lineare.
- Determinare se f è iniettiva o suriettiva.
- Determinare una base di $\ker(f)$ e di $\mathrm{im}(f)$.
- Sia $W = \langle(-3, 1, 1, 0), (0, 1, -2, 0), (-3, -1, 5, 0)\rangle$. Determinare se $W \subseteq \ker(f)$ e, in caso afferativo, se i due sottospazi siano uguali.

Esercizio 0.5. Sia $k \in \mathbb{R}$, e sia

$$A_k = \begin{pmatrix} 10 & 2k & k \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico di A_k e calcolare le sue radici $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
- Per $1 \le i \le 3$, calcolare una base β_i per gli spazi $\ker(A_0 - \lambda_i I)$.
- Verificare che $\beta = \bigcup_{i=1}^3 \beta_i$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
- Scrivere la matrice A_0 rispetto alla base β.

Esercizio 0.6. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che soddisfa $L(e_1) = L(e_2) = L(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$.

- Esplicitare $L(x, y, z)$, per $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- Determinare se L è iniettiva o suriettiva.
- Determinare il polinomio caratteristico della matrice associata a L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e calcolare le sue radici $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
- Per $1 \le i \le 3$, calcolare una base β_i per gli spazi $\ker(M_{\mathcal{C}}(L) - \lambda_i I)$.
- Verificare che $\beta = \bigcup_{i=1}^3 \beta_i$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
- Scrivere la matrice associata a L rispetto alla base β_i.

Esercizio 0.7. Sia $k \in \mathbb{R}$, e sia

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & k+1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico di A_k e calcolare le sue radici.