Esercizio 0.1 (Esercizio 8.40 dell'eserciziario della dott.ssa Carrara)**.** Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione data da $T(x, y) = (2x, x - y, 2y)$.

- Verificare che T è lineare.
- Sia $\mathcal{C}_2$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$ e sia $\mathcal{C}_3$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice associata a T rispetto a $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$.
- Sia $\beta = \{(1, 0), (1, 1)\}$ e $\beta' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$. Determinare la matrice associata a T rispetto a β e β'.

Esercizio 0.2. Sia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, e sia $\langle(a, b)\rangle$ la retta passante per (a, b) e $(0, 0)$. Determinare la matrice associata alla proiezione sulla retta $\langle(a, b)\rangle$ rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 0.3. Sia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, e sia $\langle(a, b)\rangle$ la retta passante per (a, b) e $(0, 0)$. Determinare la matrice associata alla riflessione rispetto alla retta $\langle(a, b)\rangle$ rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^2$.

Una possibile soluzione. Sia R la riflessione rispetto alla retta $\langle(a, b)\rangle$, e sia $\beta = \{(a, b), (-b, a)\}$. Ragionando in questa base, abbiamo

$$M_\beta(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se $M^{\mathcal{C}}_\beta(id)$ è la matrice di cambiamento di base da β a $\mathcal{C}$,

$$M^{\mathcal{C}}_\beta(id) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

e se $M^\beta_{\mathcal{C}}(id) = (M^{\mathcal{C}}_\beta(id))^{-1}$ è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a β, la matrice $M_{\mathcal{C}}(R)$ si può calcolare come

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{C}}(R) &= M^{\mathcal{C}}_\beta(id) M_\beta(R) M^\beta_{\mathcal{C}}(id) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 - a^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Esercizio 0.4. Sia $L : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}$ data da $L(p) = \int_0^1 p(x)dx$.

(1) Verificare che L è lineare.
(2) Sia $\beta = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ una base di $\mathbb{R}[x]_n$ e sia $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}$. Determinare la matrice associata a L rispetto a β e $\mathcal{C}$.
(3) Determinare $\mathrm{im}(L)$, $\ker(L)$ e le loro dimensioni.
(4) Determinare una base γ di $\ker(L)$ e completarla a una base β' di $\mathbb{R}[x]_n$.
(5) Determinare la matrice associata a L rispetto a β' e $\mathcal{C}$.

Soluzione alla pagina successiva.

Soluzione proposta. Questa soluzione non è da mandare a memoria o da seguire ciecamente. Ogni suo passaggio andrebbe meditato e compreso.

(1) La linearità di L dovrebbe essere nota dal corso di Analisi I: per ogni coppia f, g di funzioni continue in $[0,1]$ e per ogni $k \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^1 (kf+g)(x)dx = k\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx.$$

(2) Dalla teoria, sappiamo che che

$$M^{\mathcal{C}}_{\beta}(L) = \Big(L(1)|L(x)|L(x^2)|\ldots|L(x^k)|\ldots|L(x^n)\Big).$$

Dato che

$$\text{(i)} \qquad L(1) = 1 \text{ e } L(x^k) = \frac{1}{k+1} \text{ per ogni } k \in \mathbb{R},$$

deduciamo che

$$M^{\mathcal{C}}_{\beta}(L) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{k+1} & \ldots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.$$

(3) $\operatorname{im}(L) \subseteq \mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale, quindi o $\operatorname{im}(L) = \{0\}$ o $\operatorname{im}(L) = \mathbb{R}$. Dato che esiste $p \in \mathbb{R}[x]_n$ con $L(p) \neq 0$ (basta prendere ad esempio $p = 1$), deduciamo che $\operatorname{im}(L) = \mathbb{R}$. Usando la formula

$$\dim(\operatorname{im}(L)) + \dim(\ker(L)) = \dim(\mathbb{R}[x]_n),$$

deduciamo che $\dim(\ker(L)) = n$.

(4) Per trovare una base di $\ker(L)$ possiamo risolvere il sistema omogeneo

$$\text{(ii)} \qquad M^{\mathcal{C}}_{\beta}(L)\ \overrightarrow{v} = 0$$

con $\overrightarrow{v} = (v_0, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}[x]_n$. Il sistema (ii) è un sistema lineare in una equazione e $n+1$ incognite. Usando le formule (i), deduciamo che una possibile base per lo spazio delle soluzioni è:

$$\gamma = \Big\{1-2x, 1-3x^2, \ldots, 1-(k+1)x^k, \ldots, 1-(n+1)x^n\Big\}.$$

Come sempre, ricordiamo che questa scelta di base non è unica.

Usando il punto (3), sappiamo che per estendere γ ad una base β' di $\mathbb{R}[x]_n$ dobbiamo aggiungere a γ un solo vettore. Ricordandoci che ogni elemento $\overrightarrow{v} \in \gamma$ soddisfa $L(\overrightarrow{v}) = 0$, è sufficiente aggiungere a γ un vettore $\overrightarrow{w}$ che soddisfa $L(\overrightarrow{w}) \neq 0$. Quindi ad esempio

$$\beta' = \Big\{1, 1-2x, 1-3x^2, \ldots, 1-(k+1)x^k, \ldots, 1-(n+1)x^n\Big\}$$

è una base di $\mathbb{R}[x]_n$.

(5) Ragionando come al punto (2), con la scelta di β' effettuata al punto (4) otteniamo

$$M^{\mathcal{C}}_{\beta'}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Un'interpretazione del punto (4) dell'esercizio precedente è questa: usando la base β', possiamo esprimere in modo unico ogni polinomio $p \in \mathbb{R}[x]_n$ come somma di una funzione costante e di un polinomio il cui integrale su $[0, 1]$ è nullo.