Esercizio 0.1. Calcolare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ il determinante della matrice

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

è nullo.

Esercizio 0.2. Determinare le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \eta+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \eta-1 & 2\eta & -(\eta+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2\eta \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $\eta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 0.3. Siano dati i seguenti luoghi geometrici dello spazio $\mathbb{R}^3$:

$$\diamondsuit : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \quad \heartsuit : \begin{cases} x=-12 \\ y=-3+3t \\ z=9-3t \end{cases} \quad \spadesuit : \begin{cases} -x-y+z=0 \\ x-y-z=0. \end{cases}$$

(1) Di che luoghi geometrici si tratta?
(2) Determinare la posizione reciproca di $\diamondsuit$ e $\heartsuit$, di $\heartsuit$ e $\spadesuit$ e di $\diamondsuit$ e $\spadesuit$.
(3) Trovare, se esiste, il piano che contiene $\diamondsuit$ e $\heartsuit$ e il piano che contiene $\diamondsuit$ e $\spadesuit$.
(4) Determinare il piano ortogonale a $\heartsuit$ e passante per l'origine e dimostrare che è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Suggerimento: per effettuare la dimostrare si può usare la definizione di sottospazio vettoriale, si può dare un insieme di generatori per il piano (corredato da una spiegazione convincente del motivo per cui l'insieme generato è proprio il piano in questione) o si può descrivere il piano come l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$ per una opportuna matrice A da determinare.

Esercizio 0.4. Si consideri il luogo geometrico E dei vettori $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano l'equazione

$$x + y - x^2 + 2xy - y^2 = 0$$

Studiare il luogo geometrico E, eventualmente aiutandosi con un cambiamento di base.

Esercizio 0.5 (Facoltativo, più impegnativo)**.** Si consideri il luogo geometrico F dei vettori $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano l'equazione

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 - 2x + y + 1 = 0$$

Studiare il luogo geometrico F, eventualmente aiutandosi con un cambiamento di base.

Suggerimento: il cambiamento di base che permette di esprimere F in una forma più semplice non è una rotazione. Provate a studiare il cambiamento di base rispetto a una base $I = \{(a, b), (c, d)\}$ da determinare opportunamente.