Esercizio 0.1. Esercizio 7.21 dell'eserciziario della dott.ssa Carrara.

Esercizio 0.2. Siano dati i vettori

$$\begin{aligned}
&(30, 14, -14, 6)\\
&(5.2, 6.1, 8.4, 5.1)\\
&(-2, 13, 42, 15)\\
&(9, 8, 7, 6)\\
&(10, -8, -42, -12)\\
&(3, 9, 21, 9)\\
&(1, 3, 7, 3).
\end{aligned}$$

Estrarre da questi vettori un insieme di vettori linearmente indipendenti ed eventualmente completarlo a una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 0.3. Siano dati i vettori

$$\begin{aligned}
&(4-k, 21, 29-k, -4)\\
&(2k-2, -2, 2k-22, 18)\\
&(k+5, 20, k+10, 15)\\
&(5, 8, 10, 3),
\end{aligned}$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, estrarre da questi vettori un insieme di vettori linearmente indipendenti ed eventualmente completarlo a una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 0.4. Consideriamo le seguenti basi di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
B &= \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}\\
C &= \{(1,0,0), (0,-1,0), (0,0,-1)\}.
\end{aligned}$$

Determinare la matrice del cambiamento di base da B a C.

Una possibile soluzione. La matrice del cambiamento di base da C a B è

$$P_{C\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice del cambiamento di base da B a C è $P_{B\to C} = P_{C\to B}^{-1} = P_{C\to B}$. □

Esercizio 0.5. Consideriamo le seguenti basi di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
B &= \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}\\
C &= \{(1,2,3,4), (5,6,7,8), (1,2,4,8), (1,11,11,1)\}\\
D &= \{(0,5,5,5), (5,0,5,5), (5,5,0,5), (5,5,5,0)\}.
\end{aligned}$$

Determinare la matrice del cambiamento di base da B a C, da C a D e da B a D.

Una possibile soluzione. Vedere il file esercizio5.wxmx alla pagina `https://sites.google.com/site/lesolac/home/docencia/geomedile/giornale/14aprile`. □

Esercizio 0.6. Consideriamo le seguenti basi di $\mathbb{R}[x]_3$:

$$\begin{aligned} B &= \{1, x, x^2, x^3\} \\ C &= \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\} \\ D &= \{(1-x)^3, (1-x)^2 x, (1-x)x^2, x^3\}. \end{aligned}$$

Determinare la matrice del cambiamento di base da B a C, da C a D e da B a D.

La base C si chiama base di Lagrange di $\mathbb{R}[x]_3$, mentre la base D si chiama base di Bernstein (non normalizzata). Altre basi interessanti di spazi di polinomi e qualche cenno sulle loro applicazioni sono discusse in questo video: `https://www.youtube.com/watch?v=hf2YFK42rIo`

Una possibile soluzione. La matrice di cambiamento di base da C a B è

$$P_{C\to B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice di cambiamento di base da B a C è

$$P_{B\to C} = P_{C\to B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice di cambiamento di base da D a B è

$$P_{D\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice di cambiamento di base da B a D è

$$P_{B\to D} = P_{D\to B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice del cambiamento di base da C a D si può scrivere come:

$$P_{C\to D} = P_{B\to D} P_{C\to B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□