EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE 15/2/2011

Esercizio 1. Si consideri l'equazione

$$y' = e^{\frac{y}{t}+1} + \frac{y}{t}.$$

i) Determinare l'integrale generale (tutte le soluzioni con i loro intervalli massimali).

ii) Risolvere il problema di Cauchy con dato $y(-1) = 0$.

iii) Determinare $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che il problema di Cauchy con dato $y(1) = x_0$ abbia soluzione massimale definita in $]0, 100[$.

Soluzione. L'equazione è del tipo "omogeneo" $y' = f(\frac{y}{t})$ con $f(r) = e^r - r$. È ovvio inoltre che l'equazione, e quindi anche ogni soluzione, è definita per $t \neq 0$.

i) Da nota formula, ponendo $z = \frac{y}{t}$, si ha

$$z' = \frac{f(z) - z}{t} = \frac{e^{z+1}}{t},$$

che, tramite separazione di variabili, porge

$$z(t) = -\log(-\log|t| - k) - 1, \quad k \in \mathbb{R},$$

da cui, tenendo conto della definizione di z e imponendo il vincolo che l'argomento del logaritmo sia positivo, si ha l'integrale generale, al variare di $k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll} y :]-e^{-k}, 0[\to \mathbb{R}, & t \mapsto -t\left(\log(-\log(-t) - k) + 1\right), \\ y :]0, e^{-k}[\to \mathbb{R}, & t \mapsto -t\left(\log(-\log t - k) + 1\right). \end{array}$$

ii) Imponendo le condizioni iniziali, si ha

$$0 = y(-1) = -(-1)\left(\log(-\log(-(-1)) - k) + 1\right) = \log(-k) + 1,$$

da cui $k = -e^{-1}$. Quindi la soluzione è

$$y :]-e^{e^{-1}}, 0[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto -t\Big(\log(-\log(-t) + e^{-1}) + 1\Big).$$

iii) Dalla formula dell'integrale generale si ha che deve essere $e^{-k} = 100$ da cui $k = -\log 100$. Quindi, considerando la corrispondente soluzione, si ha

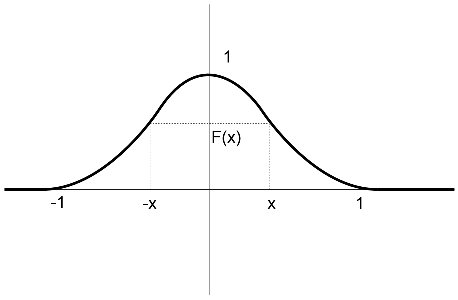

Figure 1: Funzione F

$$x_0 = y(1) = -\log\log 100 - 1.$$

Esercizio 2. Data $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \xi \mapsto F(\xi),\ C^1$, il cui grafico e' abbozzato in figura[1], sia f la sua derivata e si consideri il sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(y_1). \end{cases}$$

Trovare i punti di equilibrio e disegnare un grafico qualitativo delle orbite. Che stabilita' hanno i punti di equilibrio? Esistono orbite periodiche?

[1] $F \geq 0$, $F = 0$ in $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, $F > 0$ in $]-1, 1[$, F ha un massimo in $\xi = 0$ e $F(0) = 1$, F e' strettamente crescente in $]-1, 0[$ e strettamente decrescente in $]0, 1[$, F e' pari.

Soluzione. Il sistema è un sistema autonomo bidimensionale del tipo "conservativo" di cui abbiamo immediatamente una formula per un integrale primo

$$E(y_1, y_2) = \frac{y_2^2}{2} - F(y_1).$$

Dalle informazioni su F abbiamo che $f = 0$ in $]-\infty, 1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$, $f > 0$ in $]-1, 0[$ e $f < 0$ in $]0, 1[$. Ne segue immediatamente che i punti di equilibrio sono i punti del tipo $(y_1, 0)$ con $|y_1| \geq 1$ oppure con $y_1 = 0$. Le traiettorie sono contenute nelle curve di livello dell'integrale primo

$$E(y_1, y_2) = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

da cui, invertendo

$$y_2 = \pm 2\sqrt{F(y_1) + c}. \tag{1}$$

Ora, poiché i valori di F sono compresi tra 0 e 1, si ha che se $c < -1$ allora il secondo membro di (1) non è mai definito per alcun y_1 (non ci sono curve di livello c); se $c = -1$ allora l'unica curva di livello -1 è il punto di equilibrio $(0, 0)$ (F(0)=1 e $F(y_1) < 1$ per ogni altro y_1); se $-1 < c < 0$ allora il secondo membro di (1) è definito solo per gli y_1 tali che $F(y_1) \geq -c$ ovvero per $y_1 \in [-C, C]$ per un opportuno $C \in]0, 1[$; se $c \geq 0$ allora le curve di livello sono definite per tutti gli y_1. Interpretando quindi queste curve di livello come i grafici delle funzioni di y_1 (al variare di $c \in \mathbb{R}$) descritte da (1) si ha facilmente il grafico qualitativo delle orbite con i loro versi di percorrenza ottenuti dal segno di f. Ci sono orbite periodiche e sono quelle chiuse (che non contengono punti di equilibrio) contenute nella regione in cui $y_1 \in]-1, 1[$. Il punto di equilibrio $(0, 0)$ è stabile ma non asintoticamente, i punti di equilibrio $(y_1, 0)$ con $|y_1| \geq 1$ sono instabili.