EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE 19/6/2012

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 4y' - 12y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y''(0) = -13, \\ y(0) + y'(0) + y''(0) + y'''(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione. L'integrale generale dell'equazione del terzo ordine a coefficienti costanti è

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 \sin(2t) + c_3 \cos(2t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo le condizioni si ha

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0, \\ 9c_1 - 4c_3 = -13, \\ 40c_1 - 6c_2 - 3c_3 = 0, \end{cases}$$

che ha come soluzione $(c_1, c_2, c_3) = (-1, -43/6, 1)$ e quindi l'unica soluzione del problema è

$$y(t) = -e^{3t} - \frac{43}{6}\sin(2t) + \cos(2t).$$

Esercizio 2 Si consideri il sistema autonomo

$$\begin{cases} x' = -2(x^2-1)e^{2(x^2-1)y} + 2(x^2-1)e^{(x^2-1)y}, \\ y' = 4xye^{2(x^2-1)y} - 4xye^{(x^2-1)y}. \end{cases}$$

i) Determinare gli eventuali punti di equilibrio; determinare un integrale primo; disegnare un grafico qualitativo delle orbite e del loro verso di percorrenza; dire se ci sono orbite periodiche e dire se i punti di equilibrio sono stabili, asintoticamente stabili o instabili.

ii) Se una traiettoria soddisfa $(x(0), y(0)) = (2, 1)$ ed ad un certo $\bar{t}$ si ha $x(\bar{t}) = 3$, quanto vale $y(\bar{t})$?

Soluzione. i) I punti di equilibrio sono i punti della retta delle ascisse e i punti delle rette verticali di equazione $x = 1$ e $x = -1$ rispettivamente; un integrale primo è

$$\varphi(x,y) = e^{2(x^2-1)y} - 2e^{(x^2-1)y};$$

Ponendo $w = e^{(x^2-1)y}$, consideriamo, per ogni $c \in \mathbb{R}$, l'equazione

$$w^2 - 2w + c = 0$$

che ha radici $w = 1 \pm \sqrt{1-c}$ per $c \leq 1$. Quindi le orbite sono contenute nelle curve di equazioni implicite

$$\begin{array}{ll} (x^2-1)y = \log\left(1+\sqrt{1-c}\right), & c \leq 1, \\ (x^2-1)y = \log\left(1-\sqrt{1-c}\right), & 0 < c \leq 1. \end{array}$$

Al variare di $c \leq 1$, si ha che $\log(1+\sqrt{1-c})$ varia in $[0,+\infty[$; al variare di $0 < c \leq 1$, si ha che $\log(1-\sqrt{1-c})$ varia in $]-\infty, 0]$. Quindi in definitiva le nostre orbite (non stazionarie) sono le curve di equazione

$$(x^2-1)y = c, \quad c \neq 0.$$

Per disegnare le orbite basta scriverle in forma esplicita $y = c/(x^2-1)$. Non ci sono orbite periodiche e i punti di equilibrio sono tutti instabili.

ii) Si ha

$$\left(x(0)^2-1\right)y(0) = 3 = \left(x(\bar{t})^2-1\right)y(\bar{t}) = 8y(\bar{t}) \implies y(\bar{t}) = \frac{3}{8}.$$