1. Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+kz \\ x+z \\ x+y+k^3 z \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

Al variare del parametro k, determinare il nucleo di f e stabilire se il vettore $(1,0,3,0)$ appartiene all'immagine di f.

2. Sia f l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinare autovalori e autovettori di f e stabilire se A è diagonalizzabile.

3. Dare la definizione di rango di una matrice ed enunciare i teoremi di Cramer e Rouché-Capelli.