1. Determinare nucleo e immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y+2z \\ x-y \\ x-2y+z \end{pmatrix}$$

2. Stabilire per quali valori di k la matrice
$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$
è diagonalizzabile. Per $k = 0$ determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori.

3. Sia V uno spazio vettoriale.
   a) Dare la definizione di sottospazio vettoriale di V.
   b) Dati due sottospazi vettoriali U e W di V dimostrare che $U \cap W$ (intersezione di sottospazi) e $U + V$ (somma di sottospazi) sono sottospazi vettoriali.
   c) Se V è di dimensione finita e $U \cap V = \{0\}$, determinare la dimensione di $U + V$, giustificando la risposta.