Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA A

Prova scritta del 11.2.2020 - parte seconda

Esercizio 1. Si consideri il piano euclideo $\mathbb{E}^2$ con un sistema di coordinate ortogonali (x, y). Sia $\rho\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ la riflessione rispetto alla retta $r\colon x + y = 0$ e sia definita la funzione

$$\sigma_k(x, y) = \left(\frac{k^2-1}{k^2+1}x - \frac{2k}{k^2+1}y + \frac{4+6k}{k^2+1}, \frac{-2k}{k^2+1}x + \frac{1-k^2}{k^2+1}y + \frac{4k+6k^2}{k^2+1}\right)$$

1. Si dimostri che per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$, σ_k è una riflessione, calcolando esplicitamente l'equazione della retta s_k fissata da σ_k
2. Dopo aver giustificato perché l'isometria $\rho \circ \sigma_k$ è una isometria diretta, stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'isometria $\rho \circ \sigma_k$ è una traslazione e per quali è una rotazione.
3. Si calcoli il coseno dell'angolo convesso $P\hat{O}Q$, dove $P = \left(\frac{4}{1-\sqrt{3}}, 0\right)$, $O = (0, 0)$ e $Q := \rho \circ \sigma_0(P)$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P}^2(\mathcal{C})$ il piano proiettivo complesso munito delle coordinate proiettive $[x_0, x_1, x_2]$. Si consideri il piano proiettivo $\mathbb{C}^2$=$\mathbb{P}^2(\mathcal{C}) \setminus \{x_0 = 0\}$ munito delle coordinate affini (x, y) con $x = x_1/x_0$ e $y = x_2/x_0$. Si consideri la quartica affine $\mathcal{C}$ definita dall'equazione

$$f(x, y)\colon x^4 - 4y^4 - x^2 + 4y^2 = 0.$$

(i) Dopo aver individuato i punti singolari di $\mathcal{C}$ e della sua chiusura proiettiva, si individui la natura di ciascun punto singolare e le tangenti principali.

(ii) Per ogni tangente t ricavata nel punto precedente, si calcolino le intersezioni tra t e $\mathcal{C}$, e in ogni punto di intersezione P, il valore di $I(t, \mathcal{C}, P)$.

(iii) Si trovino gli asintoti della quartica $\mathcal{C}$.