1. Considerare l'applicazione lineare $F_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$F_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k-3)x + ky - 2z \\ x - y + kz \\ (k-4)x - (k-4)y \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

   (a) Per quali valori di k, F_k ammette inversa? Calcolare, per tali valori, il determinante della matrice associata ad F_k^{-1}.

   (b) Determinare una base per il nucleo di F_k ed una base per l'immagine di F_k.

   (c) Stabilire per quali valori di k il vettore (k, k, k) appartiene all'immagine di F_k.

2. Determinare autovalori ed autovettori dell'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_h = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{bmatrix}$$

Stabilire per quali valori di h l'applicazione lineare associata ad A_h è diagonalizzabile.

3. Sia $T : V \longrightarrow W$ una trasformazione lineare tra due spazi vettoriali V e W.

   (a) Si definiscano il nucleo e l'immagine di T. Si mostri che sono sottospazi vettoriali rispettivamente di V e di W.

   (b) Si enunci, ed eventualmente si provi, il teorema di nullità più rango.