Esame scritto di Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2016/2017

Appello di giugno 2017

Esercizio 1

Si consideri l'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ descritta dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il nucleo di g.

(ii) Sia $U_h \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio affine corrispondente alle soluzioni del sistema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3h^2 + h + 2 \\ -5h^2 + 14h \\ 4h^2 - 2h + 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali $h \in \mathbb{R}$, il più piccolo spazio affine contenente U_h e il piano $H : x_1 - x_3 = x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 3 = 0$ ha dimensione al più 3.

(iii) Dimostrare che i sottospazi affini U_1 e U_2 formano una coppia di rette parallele e calcolare le equazioni cartesiane del piano K che le contiene.

(iv) Determinare la giacitura dell'iperpiano contenente il piano K e passante per il punto $P(1, 1, 0, 1)$.

Esercizio 2

Si consideri l'endomorfismo $f_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$f_a\big((1,0,3,0)\big) = (a,0,0,1), \qquad f_a\big((0,0,3,1)\big) = (1,2,0,0),$$
$$f_a\big((-1,-1,0,0)\big) = (-1,-1,-3,0), \qquad f_a\big((1,1,0,-1)\big) = (0,-1,0,0).$$

(i) Calcolare le matrici $M_{\mathscr{B}}(f_a)$ e $M_{\mathscr{C}}(f_a)$, dove $\mathscr{B}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\mathscr{C}$ è la base formata dai vettori

$$(1,0,3,0), \quad (0,0,3,1), \quad (-1,-1,0,0), \quad (1,1,0,-1).$$

(ii) Siano $U \subset \mathbb{R}^4$ e $V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi dati dall'immagine delle applicazione lineari $f_1 + \mathbf{1}$ e $f_{-1} - \mathbf{1}$. Determinare una base dell'intersezione $U \cap V$.

(iii) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo è diagonalizzabile.

Esercizio 3

Si consideri $\mathbb{E}^3$ con un sistema di riferimento cartesiano ortonormale $(O, \{e_1, e_2, e_3\})$. Si considerino le rette r ed s e il piano π_k

$$r : \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \pi_k : (k^2 - 3)y + kx - z + k - 1 = 0,$$

dove k è un parametro reale. Si consideri lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$ con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ e si identifichi $\{x_0 \neq 0\}$ con $\mathbb{E}^3$ tramite le identità $x = x_1/x_0, y = x_2/x_0, z = x_3/x_0$. Siano poi $\overline{O}$, $\overline{r}$, $\overline{s}$ e $\overline{\pi_k}$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ rispettivamente le chiusure proiettive di O, r, s e π_k .

(i) Verificare che $\overline{r}$ ed $\overline{s}$ sono sghembe;

(ii) Trovare in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ una retta passante per $\overline{O}$ e incidente $\overline{r}$ ed $\overline{s}$;

(iii) Stabilire, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la posizione reciproca tra la retta $\overline{s}$ ed il piano $\overline{\pi_k}$ e tra s e π_k.

Esercizio 4

Si consideri il piano euclideo $\mathbb{E}^2$ con coordinate ortogonali (x, y). Si considerino, in $\mathbb{E}^2$, le curve

$$\mathcal{C}_a : f_a(x, y) = 6ax^2 - 6xy + 8x - y^2 + 8y - 10 = 0,$$

$$\mathcal{D} : g(x, y) = -x^2 + 3xy - 4x - 3y + 5$$

dove a è un parametro reale.

(i) Si dica per quali valori di a la conica $\mathcal{C}_a$ è una parabola, un'ellisse o un'iperbole. Si classifichino, al variare di a, le coniche singolari scrivendone la forma canonica affine.

(ii) Sia ponga $a = 7/6$. Scrivere la forma canonica euclidea $\mathcal{C}'_a$ di $\mathcal{C}_a$ e un'isometria diretta che la trasformi in essa.

(iii) Si ponga $a = 1/3$. Si calcoli il risultante tra f_a e g (rispetto a una variabile scelta) e i punti dell'intersezione $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{D}$.

Esame scritto di Geometria II

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2014/2015
Appello di giugno 2017

Esercizio 5
Si consideri $\mathbb{E}^3$ con un sistema di riferimento cartesiano ortonormale $(O, \{e_1, e_2, e_3\})$. Si considerino le rette r ed s e il piano π_k

$$r : \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \pi_k : (k^2 - 3)y + kx - z + k - 1 = 0,$$

dove k è un parametro reale. Si consideri lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$ con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ e si identifichi $\{x_0 \neq 0\}$ con $\mathbb{E}^3$ tramite le identità $x = x_1/x_0, y = x_2/x_0, z = x_3/x_0$. Siano poi $\overline{O}$, $\overline{r}$, $\overline{s}$ e $\overline{\pi_k}$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ rispettivamente le chiusure proiettive di O, r, s e π_k .

(i) Verificare che $\overline{r}$ ed $\overline{s}$ sono sghembe;

(ii) Trovare in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ una retta passante per $\overline{O}$ e incidente $\overline{r}$ ed $\overline{s}$;

(iii) Stabilire, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la posizione reciproca tra la retta $\overline{s}$ ed il piano $\overline{\pi_k}$ e tra s e π_k.

Esercizio 6
Sia $I := [0, 1)$ e si consideri lo spazio topologico $X = (I, \tau)$ dove τ è la topologia generata dalla seguente collezione di sottoinsiemi di I:

$$\{(0, \delta) \mid \delta \in (0, 1]\}.$$

Si consideri il sottospazio $Y = (\{0\} \cup (1/2, 1), \tau_Y)$ con τ_Y topologia indotta da quella su X.

(i) Dimostrare che X è connesso e T_0.

(ii) X è T_1? X è compatto? X è connesso per archi? X è uno spazio di Hausdorff?

(iii) Calcolare la chiusura di $\{0\}$ e di $\{3/4\}$ in Y.

(iv) Esibire, se possibile, un arco continuo in Y che collega 0 a 3/4.

Soluzione dell'esercizio 1

(i) Per calcolare il nucleo, riduciamo la matrice per righe:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \; R_1 \leftrightarrow R_3 \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & -5 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \; R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 - 4R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 + 5R_3 \\ R_3 \leftarrow -\frac{1}{5}R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2 \\ R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi

$$N(g) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_4 = x_2 + x_4 = x_3 - x_4 = 0\} = \langle (2, -1, 1, 1) \rangle.$$

(ii) Il sottospazio U_h è una retta con giacitura il nucleo di g. Calcoliamo un suo punto, risolvendo il sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 & 4h^2 - 2h + 1 \\ 0 & 3 & -5 & 8 & -5h^2 + 14h \\ 2 & 4 & 3 & -3 & 3h^2 + h + 2 \end{array}\right) \; R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \; \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -4 & 4h^2 - 2h + 1 \\ 0 & 3 & -5 & 8 & -5h^2 + 14h \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -5h^2 + 5h \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 - 4R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 + 5R_3 \\ R_3 \leftarrow -\frac{1}{5}R_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2h + 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 9h \\ 0 & 0 & 1 & -1 & h^2 - h \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2 \\ R_2 \leftarrow \frac{1}{3}R_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -4h + 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3h \\ 0 & 0 & 1 & -1 & h^2 - h \end{array}\right)$$

La retta ha equazioni parametriche

$$U_h\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4h \\ 3h \\ h^2 - h \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il sottospazio affine più piccolo contenente una retta ed un piano in $\mathbb{R}^4$ non è l'intero spazio se, e solo se, la retta è parallela al piano oppure la retta è incidente al piano. Verifichiamo che U_h non è parallela al piano. La giacitura del piano si ricava dalle equazioni parametriche:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La giacitura di U_h non è contenuta nella giacitura del piano. Infatti

$$r \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Dobbiamo quindi richiedere che la retta sia incidente al piano. Sostituendo le coordinate del punto generico della retta alle equazioni del piano troviamo:

$$\begin{cases} (1 - 4h + 2t) - (h^2 - h + t) = 0 \\ (1 - 4h + 2t) + 2(3h - t) - 2t - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = h^2 + 3h - 1 \\ 2h - 2t - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = h^2 + 3h - 1 \\ h - (h^2 + 3h - 1) - 1 = 0 \end{cases} \qquad h^2 + 2h = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 0 \vee h = -2.$$

(iii) U_1 e U_2 sono le due rette descritte dalle equazioni parametriche

$$U_1\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad U_2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e l'unico piano passa per il punto $(-3, 3, 0, 0)$ con giacitura data dai vettori $(2, -1, 1, 1)$ e

$$\big(-3 - (-7), 3 - 6, 0 - 1, 0, -1\big) = (4, -3, -2, 0).$$

Le equazioni cartesiane del piano si ottengono imponendo che la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 & 0 \\ x_1 + 3 & x_2 - 3 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

abbia rango 2. Svolgendo i conti si vede che il piano richiesto ha equazioni cartesiane

$$x_1 + 2x_3 - 4x_4 + 3 = 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 6 = 0.$$

(iv) Consideriamo il fascio di iperpiani per K:

$$\lambda(x_1 + 2x_3 - 4x_4 + 3) + \mu(2x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 6) = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$$

e imponiamo il passaggio per il punto $(1, 1, 0, 1)$:

$$\lambda(1 + 0 - 4 + 3) + \mu(2 - 0 + 5 - 6) = \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2x_3 - 4x_4 + 3 = 0.$$

Le equazioni parametriche sono

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo la giacitura $\langle (-2, 0, 1, 0), (4, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0) \rangle$.

Soluzione dell'esercizio 2

(i) Dal testo, è immediato dedurre la matrice del cambio di base

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e la matrice che descrive f_a rispetto alla base $\mathscr{C}$ sul dominio e alla base $\mathscr{B}$ sul codominio:

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f_a) = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dal diagramma

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^4, \mathscr{B} \arrow[r, "M_{\mathscr{B}}(f_a)"] \arrow[d, shift right, "M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathbf{1})^{-1}"'] & \mathbb{R}^4, \mathscr{B} \arrow[d, shift right, "M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathbf{1})^{-1}"'] \\
\mathbb{R}^4, \mathscr{C} \arrow[r, "M_{\mathscr{C}}(f_a)"] \arrow[u, shift right, "M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathbf{1})"'] \arrow[ur, "M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f_a)" description] & \mathbb{R}^4, \mathscr{C} \arrow[u, shift right, "M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathbf{1})"']
\end{tikzcd}
$$

deduciamo

$$M_{\mathscr{B}}(f_a) = M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f_a) \cdot M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathbf{1})^{-1} \qquad \text{e} \qquad M_{\mathscr{C}}(f_a) = M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathbf{1})^{-1} \cdot M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f_a).$$

La matrice inversa del cambio di base è

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathbf{1})^{-1} = M_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1/3 & 0 \\ -1 & 0 & 1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

e le matrici richieste dall'esercizio

$$M_{\mathscr{B}}(f_a) = \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathscr{C}}(f_a) = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -1 & -1 \\ -a-1 & -1 & 0 & 0 \\ -a-1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>(ii)</u> Il sottospazio U è generato dalle colonne della matrice

$$M_{\mathscr{B}}(f_1 + \mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e risulta avere dimensione 3. Riducendo la matrice, otteniamo la base $\{(1,0,0,0), (0,2,0,-1), (0,0,3,1)\}$. Il sottospazio V è generato dalle colonne della matrice

$$M_{\mathscr{B}}(f_{-1} - \mathbf{1}) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso il rango della matrice è 3 e, riducendola, possiamo ottenere come base la terna $\{(1,2,0,1), (0,4,0,-3), (0,0,1,0)\}$. Per determinare una base dell'intersezione, consideriamo il generico vettore di U

$$\alpha(1,0,0,0) + \beta(0,2,0,-1) + \gamma(0,0,3,1) = (\alpha, 2\beta, 3\gamma, \gamma - \beta)$$

ed imponiamo che appartenga a V:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \alpha & 2\beta & 3\gamma & \gamma - \beta \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - \alpha R_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2\beta - 2\alpha & 3\gamma & \gamma - \beta - \alpha \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow 2R_4 - (\beta - \alpha) R_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 6\gamma & 2\gamma + \beta - 5\alpha \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 6\gamma R_3} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2\gamma + \beta - 5\alpha \end{array}\right).$$

I vettori comuni corrispondono quindi alla condizione $\beta = 5\alpha - 2\gamma$. Per ogni $w \in U \cap V$, abbiamo la decomposizione

$$w = \alpha(1,0,0,0) + (5\alpha - 2\gamma)(0,2,0,-1) + \gamma(0,0,3,1) = \alpha(1,10,0,-5) + \gamma(0,-4,3,3),$$

quindi $\{(1,10,0,-5),(0,-4,3,3)\}$ è una base di $U \cap V$.

(iii) Il polinomio caratteristico è

$$p_a(\lambda) = \det\big(M_{\mathscr{B}}(f_a) - \lambda \mathbf{Id}_4\big) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1-\lambda & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^4 - a\lambda^3 + a\lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 - a\lambda + 1).$$

Condizione necessaria per la diagonalizzabilità è che il polinomio caratteristico abbia 4 radici reali, quindi imponiamo che il discriminante dell'ultimo fattore sia non negativo:

$$\Delta = a^2 - 4 \geqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \leqslant -2 \ \vee \ a \geqslant 2.$$

Per $a < -2$ e $a > 2$, l'endomorfismo è diagonalizzabile, perché abbiamo quattro autovalori di molteplicità algebrica (e quindi geometrica) 1. Per $a = \pm 2$, invece abbiamo autovalori con molteplicità algebrica maggiore di 1 di cui dobbiamo quindi studiare la molteplicità geometrica.

($a = 2$) Il polinomio caratteristico si decompone come $p_2(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)^3$. La matrice non è diagonalizzabile perché $m_a(1) = 3$, ma $m_g(1) = 4 - r\big(M_{\mathscr{B}}(f_2) - \mathbf{Id}_4\big) < 3$. Infatti, la matrice $M_{\mathscr{B}}(f_2) - \mathbf{Id}_4$ ha rango almeno 2 (cè un minore di ordine 2 non nullo):

$$M_{\mathscr{B}}(f_2) - \mathbf{Id}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

($a = -2$) Il polinomio caratteristico si decompone come $p_{-2}(\lambda) = (\lambda+1)^3(\lambda-1)$. Anche in questo caso, la matrice non è diagonalizzabile perché $m_a(-1) = 3$, ma $m_g(-1) = 4 - r\big(M_{\mathscr{B}}(f_{-2}) + \mathbf{Id}_4\big) < 3$:

$$M_{\mathscr{B}}(f_{-2}) + \mathbf{Id}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione dell'esercizio 3 (i) Innanzitutto, scriviamo l'equazione cartesiana di r

$$r : \begin{cases} x = 2 \\ y = 0, \end{cases}$$

quindi possiamo adesso scrivere le chiusure proiettive operando le trasformazioni indicate:

$$\overline{r} : \begin{cases} x_1 = 2x_0 \\ x_2 = 0, \end{cases} \qquad \overline{s} : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_0 = 0. \end{cases}$$

Per verificare che $\overline{r}$ e $\overline{s}$ sono sghembe, calcoliamo la loro intersezione, data dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_0 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

ma questo non è possibile, quindi $\overline{s}$ ed $\overline{r}$ sono sghembi.

(ii) Notiamo che il punto $\overline{O} = [1,0,0,0]$ e consideriamo invece i punti $\overline{P_1}$, $\overline{P_2} \in \overline{r}$ e $\overline{Q_1}$, $\overline{Q_2} \in \overline{s}$, dove

$$\overline{P_1} = [1,2,0,0], \quad \overline{P_2} = [0,0,0,1], \quad \overline{Q_1} = [1,0,0,1], \quad \overline{Q_2} = [0,0,1,1].$$

Vogliamo calcolare il piano proiettivo passante per $\overline{O}$ e contenente $\overline{r}$, cioè passante per $\overline{P_1}$ e $\overline{P_2}$. Per farlo imponiamo che la matrice seguente abbia determinante uguale a 0:

$$\left| \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 2x_2 = 0,$$

quindi il piano cercato ha equazione $x_2 = 0$. Facciamo lo stesso per il piano passante per $\overline{O}$ e contenente $\overline{2}$, cioè passante per $\overline{Q_1}$ e $\overline{Q_2}$:

$$\left| \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = x_1 = 0,$$

che ci fornisce il piano di equazione $x_1 = 0$. Ovviamente la retta proiettiva cercata è l'intersezione dei due piani, cioè la retta di equazioni:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Consideriamo prima di tutto la retta s ed il piano π_k nello spazio affine. Allora la retta s, scritta in forma parametrica è

$$s: \begin{cases} x = 0 \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

che ha direzione $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Scriviamo anche il piano π_k in equazioni parametriche

$$\pi_k: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = k - 1 + (k^3 - 3)v + ku \end{cases} \qquad u, v \in \mathbb{R},$$

quindi la giacitura del piano π_k è generata dai vettori

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k^2 - 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Consideriamo ora la matrice data dai tre vettori direzioni: se questa ha determinante nullo, allora la direzione della retta s è combinazione lineare di quelle del piano π_k e quindi s è o parallela rispetto a π_k o contenuta nel piano stesso. Questo accade quindi se

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k^2 - 3 \end{pmatrix} \right| = -k^2 + 4 = 0,$$

cioè se $k = 2$ o $k = -2$. Abbiamo quindi 3 casi:

- $k \neq 2$ e $k \neq -2$
  In questo caso s ha direzioni linearmente indipendente rispetto ai vettori della giacitura di π_k, allora l'unica possibilità è che si incontrino in un punto, cioè s e π_k sono incidenti.

- $k = 2$
  In questo caso $\pi_2 : 2x + y - z + 1 = 0$ e vogliamo vedere se ha qualche intersezione con la retta s, sostituendo a x, y e z nell'equazione del piano π_2, le equazioni parametriche della retta s:
  $$0 + t - 1 - t + 1 = 0,$$
  allora ogni punto della retta appartiene al piano, quindi in questo caso $\underline{s \text{ è contenuta in } \pi_2}$.
- $k = -2$
  Anche in quest'ultimo caso vogliamo vedere se la retta s e il piano $\pi_{-2} : 2x - y + z + 3 = 0$ hanno punti in comune:
  $$0 - t + 1 + t + 3 = 4,$$
  allora non ci sono punti in comune e $\underline{s \text{ e } \pi_{-2} \text{ sono paralleli (e } s \text{ non è contenuta in } \pi_{-2})}$.

Dobbiamo quindi considerare la stessa situazione nello spazio proiettivo, ma in questo caso non esiste la situazione in cui la retta ed il piano sono paralleli: infatti sappiamo che per la formula di Grassmann proiettiva, un piano ed una retta in uno spazio proiettivo di dimensione 3 si intersecano sempre, quindi le situazioni si riducono a:

- $k = 2$
  In questo caso $\underline{\overline{\pi_2} \text{ contiene la retta } \overline{s}}$.
- $k \neq 2$
  In tutti gli altri casi $\underline{\overline{\pi_k} \text{ e } \overline{s} \text{ sono incidenti in un punto}}$.

Soluzione dell'esercizio 4
La matrice rappresentativa della conica $\mathcal{C}_a$ è

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 4 & 4 \\ 4 & 6a & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

e ha determinante $-36a+10$. Di conseguenza l'unica conica degenere si ha per $a = 5/18$. Il determinante della matrice dei termini di grado 2 è $-6a - 9$ quindi siamo di fronte a un'ellisse per $a < -3/2$, a un'iperbole per $a > -3/2$ o a una parabola per $a = -3/2$. Per $a = 5/18$ abbiamo un'iperbole degenere e quindi è anche l'unica conica singolare. La forma canonica affine in questo caso è $x^2 - y^2 = 0$.

Poniamo $a = 7/6$. Sappiamo già che la conica è un'iperbole non degenere e dobbiamo ridurla a forma canonica euclidea. Incominciamo ricavando una base ortonormale di autovettori di $V = \mathbb{R}^2$. Poichè la traccia di A_0 è 6 e il suo determinante è -16, concludiamo che i suoi autovalori sono -2 e 8. Ricaviamo l'autospazio relativo all'autovalore 8. I suoi membri hanno coordinate che soddisfano

$$\begin{cases} 7x - 3y = 8x \\ -3x - y = 8y \end{cases}$$

da cui ricaviamo l'equazione $x = -3y$ (che risolve il sistema). Di conseguenza gli autospazi sono

$$V_8 = \langle (3, -1)^T \rangle \qquad \text{e} \qquad V_{-2} = \langle (1, 3)^T.$$

Quindi la matrice

$$M = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

identifica una rotazione R^{-1}. Operiamo la rotazione

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x_1 + y_1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(-x_1 + 3y_1) \end{cases}$$

e andiamo a sostituire:

$$
\begin{aligned}
f_a &= 7x^2 - 6xy - y^2 + 8x + 8y - 10 = \\
&= \frac{1}{10}\left(7(3x_1+y_1)^2 - (-x_1+3y_1)^2 - 6(3x_1+y_1)(-x_1+3y_1)\right) + \frac{8}{\sqrt{10}}(3x_1+y_1) + \frac{8}{\sqrt{10}}(-x_1+3y_1) - 10 = \\
&= \frac{1}{10}\left((63-1+18)x_1^2 + y_1^2(7-9-18) + x_1y_1(42+6-48)\right) + \frac{8}{\sqrt{10}}(3x_1+y_1) + \frac{8}{\sqrt{10}}(-x_1+3y_1) - 10 = \\
&= 8x_1^2 - 2y_1^2 + \frac{16}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{32}{\sqrt{10}}y_1 - 10. \quad (1)
\end{aligned}
$$

Completiamo i quadrati (ricordandoci che vogliamo fare in modo che la trasformazione finale sia un'isometria)

$$
\begin{aligned}
f_a = 7x^2 - 6xy - y^2 + 8x + 8y - 10 = [...] &= 8x_1^2 - 2y_1^2 + \frac{16}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{32}{\sqrt{10}}y_1 - 10 = \\
&= 8\left(x_1^2 + 2\frac{1}{\sqrt{10}}x_1\right) - 2\left(y_1^2 - 2\frac{8}{\sqrt{10}}y_1\right) - 10 = \\
&= 8\left(x_1^2 + 2\frac{1}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\right) - 2\left(y_1^2 - 2\frac{8}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{64}{10} - \frac{64}{10}\right) - 10 = \\
&= 8\left(x_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{8}{10} - 2\left(y_1 - \frac{8}{\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{128}{10} - 10 = \\
&= 8\left(x_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 - 2\left(y_1 - \frac{8}{\sqrt{10}}\right)^2 + 2 = 8x_2^2 - 2y_2^2 + 2 \quad (2)
\end{aligned}
$$

dove abbiamo posto

$$
T : \begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} \\ y_2 = y_1 - \frac{8}{\sqrt{10}}. \end{cases}
$$

Di conseguenza, se effettuiamo la rotazione seguita dalla traslazione avremo trasformato la conica in

$$
4x_2^2 - y_2^2 = -1,
$$

che è in forma canonica. L'isometria ricavata è quindi data dalla trasformazione

$$
F : \begin{cases} x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x - y) + \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x - y + 1) \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(x + 3y) - \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(x + 3y - 8). \end{cases}
$$

Poniamo $a = 1/3$. Allora abbiamo

$$
\mathcal{C}_a : f_a(x,y) = 2x^2 - 6xy - y^2 + 8x + 8y - 10 = -y^2 + y(8 - 6x) + (2x^2 + 8x - 10) = 0
$$

e vogliamo intersecare questa conica con

$$
\mathcal{D} : g(x,y) = -x^2 + 3xy - 4x - 3y + 5 = y(3x - 3) - (4x + x^2 - 5).
$$

Scriviamo il risultante rispetto a y.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}_y(f_a, g) &= \left|\begin{bmatrix} -1 & 8-6x & 2x^2+8x-10 \\ 3x-3 & -(4x+x^2-5) & 0 \\ 0 & 3x-3 & -(4x+x^2-5) \end{bmatrix}\right| = \\
= -\left|\begin{bmatrix} -(4x+x^2-5) & 0 \\ 3x-3 & -(4x+x^2-5) \end{bmatrix}\right| &- (3x-3)\left|\begin{bmatrix} 8-6x & 2x^2+8x-10 \\ 3x-3 & -(4x+x^2-5) \end{bmatrix}\right| = \\
= -(4x+x^2-5)^2 - (3x-3)&[-(4x+x^2-5)(8-6x) - (3x-3)(2x^2+8x-10)] =
\end{aligned}
$$

$$= -x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 14x + 5 = -(x-1)^3(x+5).$$

Questo vuol dire che, contati con la giusta molteplicità, avremo 4 punti di intersezione (come previsto dal Teorema di Bezout), e che le ascisse di questi punti saranno 1 e 5. Inoltre ne avremo tre con ascissa 1 (contati con molteplicità). Andando a sostituire otteniamo

$$g(-5, y) = -18y \qquad g(1, y) = 0$$

$$f_a(-5, y) = -y^2 + 38y \qquad f_a(1, y) = -y^2 + 2y$$

quindi i punti di intersezione sono

$$Q_1 = (-5, 0) \qquad Q_2 = (1, 0) \qquad Q_3 = (1, 2).$$

Per completezza riportiamo anche il risultante calcolato rispetto all'altra variabile:

$$\mathrm{Res}_x(f_a, g) = y^4 - 4y^3 + 4y^2 = y^2(y-2)^2.$$

Soluzione dell'esercizio 5
Si veda la soluzione dell'esercizio 3.

Soluzione dell'esercizio 6
La topologia τ è composta, oltre che da X e dall'insieme vuoto, di tutti e soli gli insiemi del tipo $(0, \delta)$ con $\delta \in (0, 1]$. Questo vuol dire che ogni aperto di X è anche un aperto di (I, τ_e) dove τ_e è la topologia indotta da quella euclidea su I. Siamo quindi di fronte a due topologie confrontabili con quella di X che è più debole. Tra le varie conseguenze di questo fatto, abbiamo che ogni funzione $f : [0, 1] \to I$ (stiamo munendo $[0, 1]$ della topologia euclidea) che è continua per la topologia euclidea è continua con τ. In particolare, siccome (I, τ_e) è connesso per archi, anche X lo è. Lo stesso vale per la connessione.

Mostriamo che X è T_0. Siano a, b due punti distinti di X. Se $a = 0$ allora ogni intorno di b diverso da X non contiene a. Se entrambi sono diversi da 0 posso assumere $a < b$: l'insieme $(0, (a + b)/2)$ è un aperto in X che contiene a ma non b. Abbiamo mostrato che per ogni coppia di punti esiste un aperto che contiene uno dei due ma non l'altro: questa è la definizione di spazio topologico T_0.

X è compatto infatti se $\{U_j\}_{j\in J}$ è una collezione di aperti di X che copre X allora esiste almeno un $\bar{j} \in J$ tale che $0 \in U_{\bar{j}}$. Ma l'unico aperto di X che contiene 0 è X quindi ogni ricoprimento aperto contiene X. Un sottoricoprimento finito è quindi $\{U_{\bar{j}}\} = \{X\}$.

Mostrare che $P = \{3/4\}$ non è chiuso è semplice infatti il suo complementare non è aperto. Questo basta per concludere che X non è T_1 (e di conseguenza nemmeno di Hausdorff). Siccome gli aperti non banali sono tutti e soli gli insiemi del tipo $(0, \delta)$, i chiusi in X diversi da X e dal vuoto sono del tipo

$$\{0\} \cup [\delta, 1)$$

con $\delta \in (0, 1]$ e $\{0\}$. I chiusi di Y sono della stessa forma con $\delta \in (1/2, 1]$. Di conseguenza la chiusura di P in Y è $\overline{P} = \{0\} \cup [3/4, 1)$.

Il punto $Q = \{0\}$ è chiuso in X infatti il suo complementare è $(0, 1)$ che è un aperto. Di conseguenza Q è anche un chiuso in Y infatti $Q = Q \cap Y$ (tutti i chiusi di Y sono di questo tipo).

Si consideri l'arco $f : [0, 1] \to Y$ tale che $f(0) = 0$ e $f(t) = 1/2 + t/4$ (si ha quindi $f(1) = 3/4$). Mostriamo che f è un arco continuo in Y. Definiamo, per comodità, $U_\delta = (1/2, \delta)$ con $\delta \in (1/2, 1]$ e $U_0 = Y$. Questi sono tutti e soli gli aperti non vuoti di Y. Si ha

$$f^{-1}(U_\delta) = \begin{cases} \text{se } \delta = 0 & f^{-1}(Y) = [0, 1] \\ \text{se } \delta < 3/4 & (0, 4\delta - 2) \\ \text{se } \delta \geq 3/4 & (0, 1] \end{cases}$$

quindi la controimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di $[0, 1]$ con la topologia indotta da quella euclidea: f è un arco continuo in Y che collega 0 e 3/4.