Esame scritto di Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2015/2016

Appello di giugno 2016

Esercizio 1
Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si considerino i sottospazi affini

$$U_a = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{ \begin{array}{l} ax + y + (2-a)z + aw = 2 \\ x - z = 0 \end{array} \right. \right\},$$
$$V_b = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + bz + w = -1 \\ (b+3)x + 2y + z = 1 \end{array} \right. \right\},$$

con a e b parametri reali.

(i) Determinare per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ la dimensione degli spazi affini U_a e V_b.

(ii) Determinare, $\forall h \in \mathbb{R}$, equazioni parametriche dello spazio affine $U_h \cap V_h$.

(iii) Determinare, $\forall h \in \mathbb{R}$, se U_h e V_h sono rispettivamente coincidenti, paralleli non coincidenti, incidenti o sghembi, e determinare la dimensione del più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ contenente tanto U_h quanto V_h.

Esercizio 2
Calcolare lo spettro dell'operatore di $\mathbb{C}^4$ descritto dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare se l'operatore è diagonalizzabile. In caso affermativo, esibire una base diagonalizzante, altrimenti determinare la forma canonica di Jordan dell'operatore.

Esercizio 3

Si consideri lo spazio euclideo reale $\mathbb{E}^4$ dotato di un riferimento cartesiano ortonormale di coordinate (x, y, z, w). Si considerino il sottospazio r di equazioni

$$x - y = z - w = y + z - 1 = 0$$

e il punto A di coordinate $(2, 1, 1, 0)$.

(i) Si ricavino delle equazioni parametriche per l'iperpiano H ortogonale a r e passante per il punto A. Sia B l'intersezione di H con r;

(ii) Individuare, su r, un punto C tale che il triangolo T di estremi A, B e C sia isoscele e la coordinata w di C sia negativa. Quanto valgono gli angoli interni di T?

(iii) Ricavare la proiezione ortogonale del punto $D(-1, 2, -4, 0)$ sul piano contenente il triangolo T.

Esercizio 4

Si consideri il piano euclideo $\mathbb{E}^2$ con coordinate ortogonali (x, y) e il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ reale con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Si identifichi $\mathbb{E}^2$ con $\mathbb{P}^2 \setminus \{x_0 = 0\}$ con la scelta $x = x_1/x_0$ e $y = x_2/x_0$. Si considerino, in $\mathbb{E}^2$, le curve

$$\mathcal{C} : f(x, y) = -2x^3 + 6x^2y - 9xy^2 + (a + 50)x + 5y^3 + (a - 50)y = 0,$$

$$\mathcal{D} : g(x, y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 50 = 0.$$

Si indichi con $\overline{\mathcal{C}}$ la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$.

(i) Dimostrare che, per $a = 50$, $\overline{\mathcal{C}}$ è liscia e che il punto $(0, 0)$ è di flesso per $\mathcal{C}$. Qual è la tangente inflessionale?

(ii) Sapendo che il risultante $\mathrm{Res}_x(f, g)$ è $4a^2(11y^2 - 50)$, dimostrare che, per $a = 0$, $\overline{\mathcal{C}}$ è riducibile e ricavarne le componenti.

(iii) Scrivere un'isometria che trasforma $\mathcal{D}$ nella sua forma canonica euclidea.

Esame scritto di Geometria II

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2014/2015

Appello di giugno 2016

Esercizio 5
Si consideri lo spazio euclideo reale $\mathbb{E}^4$ dotato di un riferimento cartesiano ortonormale di coordinate (x, y, z, w). Si considerino il sottospazio r di equazioni

$$x - y = z - w = y + z - 1 = 0$$

e il punto A di coordinate $(2, 1, 1, 0)$.

(i) Si ricavino delle equazioni parametriche per l'iperpiano H ortogonale a r e passante per il punto A. Sia B l'intersezione di H con r;

(ii) Individuare, su r, un punto C tale che il triangolo T di estremi A, B e C sia isoscele e la coordinata w di C sia negativa. Quanto valgono gli angoli interni di T?

(iii) Ricavare la proiezione ortogonale del punto $D(-1, 2, -4, 0)$ sul piano contenente il triangolo T.

(iv) Sul piano euclideo $z = w = 0$ si consideri la conica

$$\mathcal{C} : f(x, y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 50 = 0$$

e si scriva un'isometria inversa che trasforma $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica euclidea.

Esercizio 6
Sia $I := [0, 1)$ e si consideri lo spazio topologico $X = (I, \tau)$ dove τ è la topologia generata dalla seguente collezione di sottoinsiemi di I:

$$\{(0, \delta) \mid \delta \in (0, 1]\}.$$

Si consideri il sottospazio $Y = (\{0\} \cup (1/2, 1), \tau_Y)$ con τ_Y topologia indotta da quella su X.

(i) Dimostrare che X è connesso e T_0.

(ii) X è T_1? X è compatto? X è connesso per archi? X è uno spazio di Hausdorff?

(iii) Calcolare la chiusura di $\{0\}$ e di $\{3/4\}$ in Y.

(iv) Esibire, se possibile, un arco continuo in Y che collega 0 a $3/4$.

Soluzione dell'esercizio 1

(i) Nelle due equazioni che definiscono U_a osserviamo che il coefficiente della variabile y è diverso da zero nella prima e uguale a zero nella seconda. Se le due equazioni fossero linearmente dipendenti, quindi proporzionali, ne deriverebbe allora che la seconda è identicamente nulla, assurdo. Quindi le due equazioni che definiscono U_a sono linearmente indipendenti per ogni valore di a, che ha quindi dimensione $4-2=2$.

Analogo argomento applicato ai coefficienti della variabile w (o z) delle equazioni di V_b mostra che anche V_b è un piano. (Si poteva in ambo i casi argomentare anche in altre maniere, per esempio scrivendo la matrice completa del sistema e mostrando un minore 2×2 non nullo).

(ii) Lo spazio affine $U_h \cap V_h$ ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} hx + y + (2-h)z + hw = 2 \\ x - z = 0 \\ 2x + y + hz + w = -1 \\ (h+3)x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Imposto la matrice conpleta del sistema e opero un'eliminazione che tiene conto della presenza dei parametri, e quindi scambio opportunamente righe in modo da ridurre i calcoli.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} h & 1 & 2-h & h & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & h & 1 & -1 \\ h+3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & h & 1 & -1 \\ h & 1 & 2-h & h & 2 \\ h+3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h+2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & h & 2 \\ 0 & 2 & h+4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h+2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -h & h-1 & 3 \\ 0 & 0 & -h & -2 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h+2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & h & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -h & h-1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h+2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & h & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & h+1 & 0 \end{array}\right)$$

ne segue che la matrice dei coefficienti ha rango 4, e quindi soluzione unica, per $h \notin \{0,-1\}$. Cominciamo allora studiando questi due casi particolari.

$\underline{h=0}$. In questo caso le equazioni relative alle ultime due righe della matrice ottenuta sono $w=0$ e $2w=-3$ che non sono compatibili per cui il sistema non ha soluzioni. Quindi per $h=0$ lo spazio affine $U_h \cap V_h$ è vuoto.

$\underline{h=-1}$. In questo caso l'ultima riga si annulla, la matrice dei coefficienti e la matrice completa hanno ambedue rango 3 e quindi lo spazio affine $U_h \cap V_h$ ha dimensione $4-3=1$. Risolvendo il sistema otteniamo le equazioni parametriche della retta

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{h \notin \{0,-1\}}$. In questo caso possiamo dividere la terza riga per h e la quarta per $h+1$ ottenendo la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h+2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/h & -3/h \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

la cui soluzione unica è
$$\begin{pmatrix} -3/h \\ 2+6/h \\ -3/h \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) $\underline{h \notin \{0,-1\}}$. In questo caso, dal momento che si tratta di due piani in uno spazio di dimensione 4 che si intersecano in un punto, essi sono incidenti. Il più piccolo sottospazio affine che li contiene entrambi ha dimensione $2+2-0=4$ (e quindi è l'intero spazio $\mathbb{R}^4$).

$\underline{h=-1}$. Anche in questo caso, dal momento che si tratta di due piani in uno spazio di dimensione 4 che si intersecano in una retta, essi sono incidenti. Il più piccolo sottospazio affine che li contiene entrambi ha dimensione $2+2-1=3$.

$\underline{h=0}$. In questo caso i due piani non si intersecano, quindi sono paralleli o sghembi. Se fossero paralleli avrebbero la medesima giacitura e quindi la matrice dei coefficienti avrebbe rango 2. Essa ha invece rango 3 e quindi sono sghembi e il più piccolo sottospazio affine che li contiene entrambi ha quindi dimensione $3+1=4$ (e quindi è l'intero spazio $\mathbb{R}^4$).

Soluzione dell'esercizio 2

Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice data

$$\det(A-tI_4)=\det\begin{pmatrix} 4-t & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2-t & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 4-t & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2-t \end{pmatrix}=$$

$$=(4-t)\det\begin{pmatrix} 2-t & -2 & -2 \\ 1 & 4-t & 1 \\ -1 & -1 & 2-t \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 4-t & 1 \\ 1 & -1 & 2-t \end{pmatrix}+$$

$$-2\det\begin{pmatrix} 1 & 2-t & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2-t \end{pmatrix}+2\det\begin{pmatrix} 1 & 2-t & -2 \\ -1 & 1 & 4-t \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=(4-t)\{(2-t)[(4-t)(2-t)+1]+2(2-t+1)-2(-1+4-t)\}+[(4-t)(2-t)+1+2(t-2-1)-2(1-4+t)]+$$
$$-2[2-t+1+(t-2)(t-2-1)]+2[-1+4-t+(t-2)(1-4+t)]=$$
$$=(4-t)\{(2-t)[t^2-6t+8+1]+2(3-t)-2(3-t)\}+[t^2-6t+8+1+2(t-3)-2(t-3)]+$$
$$-2[3-t+(t-2)(t-3)]+2[3-t+(t-2)(t-3)]=$$
$$=(4-t)\{(2-t)[t^2-6t+9]\}+[t^2-6t+9]=(t^2-6t+9)[(4-t)(2-t)+1]=$$
$$=(t^2-6t+9)^2=(t-3)^4.$$

Quindi lo spettro dell'operatore è composto dal singolo autovalore 3 con molteplicità algebrica 4.

Per calcolarne la molteplicità geometrica osserviamo che la matrice

$$A-3I_4=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2: infatti la seconda colonna è uguale alla prima cambiata di segno, e la quarta colonna è uguale alla terza (il che implica che il rango è al massimo due) mentre la prima e la terza non sono proporzionali (e quindi è almeno due). Quindi la matrice non è diagonalizzabile, e la sua forma di Jordan ha due blocchi, entrambi relativi all'autovalore 3.

Ciò non basta per determinare la forma di Jordan: i due blocchi potrebbero avere entrambi ordine 2 o essere uno di ordine 1 e uno di ordine 3. Per risolvere il dubbio basta calcolare il rango di $(A-3I_4)^2$. Moltiplicando righe per colonne otteniamo che $(A-3I_4)^2$ è la matrice nulla. Ne consegue che nessun blocco di Jordan della matrice ha ordine strettamente maggiore di due per cui la forma di Jordan della matrice è

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione dell'esercizio 3
Ricaviamo un sistema di equazioni parametriche per r:

$$r: \begin{cases} x-y=0 \\ z-w=0 \\ y+z-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y \\ w=z \\ y=1-z \end{cases} \quad \begin{cases} x=1-t \\ y=1-t \\ z=t \\ w=t. \end{cases}$$

La giacitura di r è generata dal vettore $d=(-1,-1,1,1)$ perciò l'iperpiano cercato ha equazione $-(x-2)-(y-1)+(z-1)+(w)=0$, cioè

$$H: -x-y+z+w+2=0.$$

Dei generatori per il complemento ortogonale di $\langle d \rangle$ sono i vettori

$$(-1,1,0,0)^T, (1,0,1,0)^T \quad \text{e} \quad (1,0,0,1)^T$$

quindi un sistema di equazioni parametriche per H è il seguente:

$$\begin{cases} x= & 2-\alpha+\beta+\gamma \\ y= & 1+\alpha \\ z= & 1+\beta \\ w= & 0+\gamma. \end{cases}$$

L'intersezione tra H ed r si può ottenere partendo dall'equazione di H e sostituendo l'espressione parametrica di r nell'equazione:

$$-(1-t)-(1-t)+t+t+2=0 \Longleftarrow 4t=0.$$

L'intersezione sarà quindi il punto che corrisponde a $t=0$, cioè

$$B=(1,1,0,0).$$

La lunghezza del lato del triangolo di estremi A e B si ottiene ricavando il modulo di $v=A-B$:

$$\overline{AB}=d(A,B)=\| A-B \|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

Dobbiamo cercare un punto su r che disti $\sqrt{2}$ da B. Sia P_t il punto di r identificato da $P_t=B+td$. Siccome

$$d(P_t,B)=\| P_t-B \|=\| B+td-B \|=|t| \| d \|=|t|\sqrt{1+1+1+1}=2|t|$$

C sarà uno dei punti ottenuti ponendo $|t|=\sqrt{2}/2$. Dovendo scegliere il punto con coordinata w negativa avremo

$$C=(1+\sqrt{2}/2, 1+\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2).$$

In questo modo il triangolo ABC è isoscele e, per costruzione, rettangolo in B, quindi i suoi angoli varranno $\pi/4, \pi/4$ e $\pi/2$.

Sia π il piano contentente il triangolo T. Scegliamo un punto di π, ad esempio B e ricaviamo una base per la giacitura di π formata da vettori della forma $P - B$. Possiamo scegliere, ad esempio, i vettori $v_1 = A - B$ e $v_2 = d$. Poichè v_1 e v_2 sono ortogonali, la proiezione ortogonale $u_{\|}$ del vettore $u = D - B$ sulla giacitura è dato da

$$\frac{< u, v_1 >}{< v_1, v_1 >} v_1 + \frac{< u, v_2 >}{< v_2, v_2 >} v_2.$$

Abbiamo

$$u = (-2, 1, -4, 0)$$

$$v_1 = (1, 0, 1, 0) \qquad < v_1, u >= -6 \qquad < v_1, v_1 >= 2$$

$$v_2 = (-1, -1, 1, 1) \qquad < v_2, u >= -3 \qquad < v_2, v_2 >= 4$$

da cui

$$u_{\|} = -3v_1 - \frac{3}{4} v_2 = \frac{1}{4}(-9, 3, -15, -3).$$

Il punto cercato è quindi

$$P = B + u_{\|} = \frac{1}{4}(-5, 7, -15, -3).$$

Soluzione dell'esercizio 4

Per le equazioni di $\overline{\mathcal{C}}$ basta omogeneizzare usando le relazioni $x = x_1/x_0$ e $y = x_2/x_0$:

$$\overline{\mathcal{C}} : F(x_0, x_1, x_2) = -2x_1^3 + 6x_1^2 x_2 - 9x_1 x_2^2 + 5x_2^3 + (a + 50)x_0^2 x_1 + (a - 50)x_0^2 x_2 = 0.$$

Dimostrare che $\overline{\mathcal{C}}$ è riducibile per $a = 0$ è semplicissimo: sappiamo che $\mathcal{C}$ è riducibile poichè il risultante $\mathrm{Res}_x(f, g)$ è identicamente nullo per $a = 0$. Questo vuol dire che $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ hanno una componente in comune. Vediamo che tipo di curva algebrica è $\mathcal{D}$. Avendo grado 2 è una conica ed è non degenere infatti la matrice associata è

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} -50 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{array}\right]$$

e ha determinante $-50 \cdot 6$. La matrice A_0 dei termini quadratici ha determinante 6 quindi $\mathcal{D}$ è un'ellisse. Gli autovalori di A_0 si ricavano facilmente sapendo che la traccia è 7: questi sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$. Poichè il segno del determinante di A è negativo concludiamo che l'ellisse e a punti reali. Essendo non degenere è anche irriducibile. Quindi sappiamo che $\mathcal{D}$ è una delle componenti di $\mathcal{C}$ per $a = 0$. Per trovare l'altra componente cerchiamo un polinomio di primo grado $h(x, y) = ax + by + c$ tale che $f = gh$. Confrontando il coefficiente di x^3 in f e quello di x^2 in g si vede subito che $a = -1$. Similmente si ricavano $b = 1$ e $c = 0$. Un semplice conto verifica che $f = gh$ con $h = x - y$. Abbiamo quindi le due componenti di $\mathcal{C}$ che sono la conica $\mathcal{D}$ e la retta $x - y = 0$. Le componenti di $\overline{\mathcal{C}}$ sono quindi $\overline{\mathcal{D}}$ e la retta $x_1 - x_2 = 0$.

Poniamo $a = 50$. Per dimostrare che la curva $\overline{\mathcal{C}}$ è liscia consideriamo le sue derivate parziali e annulliamole simultaneamente. In particolare, la derivata rispetto x_0 è $200x_0x_1$ da cui ricaviamo che i punti singolari, se esistono, stanno su $x_0 = 0$ o su $x_1 = 0$. Le altre due derivate parziali sono

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -6x_1^2 + 12x_1x_2 - 9x_2^2 + 100x_0^2$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 6x_1^2 - 18x_1x_2 + 15x_2^2.$$

Se poniamo $x_1 = 0$ abbiamo $x_2 = 0$ dalla seconda equazione. Ma a questo punto la prima equazione può essere soddisfatta solo se $x_0 = 0$. Se invece poniamo $x_0 = 0$ abbiamo il sistema

$$\begin{cases} -6x_1^2 + 12x_1x_2 - 9x_2^2 = 0 \\ 6x_1^2 - 18x_1x_2 + 15x_2^2 \end{cases} \begin{cases} -6x_2(x_1 + x_2) = 0 \\ 6x_1^2 - 18x_1x_2 + 15x_2^2 \end{cases}$$

quindi abbiamo $x_2 = 0$ o $x_1 = x_2$. Se $x_2 = 0$ ricadiamo nell'assurdo quindi l'unica possibilità è che valga $x_1 = x_2$. In tal caso dall'ultima equazione otteniamo $x_1 = 0$ che porta comunque ad un assurdo. Abbiamo dimostrato che l'unica soluzione del sistema ottenuto ponendo il gradiente uguale a 0 è $[0, 0, 0]$ che non corrisponde a nessun punto di $\mathbb{P}^2$. Questo dimostra quindi che $\overline{\mathcal{C}}$ è una cubica liscia (e lo stesso vale per $\mathcal{C}$).

Consideriamo una retta in forma parametrica passante per il punto $P = (0, 0)$. Ogni retta r di questo tipo si scrive come $x = bt, y = ct$. Se sostituiamo queste equazioni nel'equazione della cubica abbiamo

$$(-2b^3 + 6b^2c - 9bc^2 + 5c^3)t^3 + 100bt = 0.$$

Questo ci dice che $m_P(\mathcal{C}) = 1$ (cosa nota poichè la cubica è liscia) e

$$I(\mathcal{C}, r, P) = \begin{cases} 1 & \text{se } b \neq 0 \\ 3 & \text{se } b = 0. \end{cases}$$

Questo dimostra che la tangente in P a $\mathcal{C}$ è $x = 0$ ed è tangente inflessionale (e che P è flesso) poichè la molteplicità di intersezione è 3.

Sappiamo già che gli autovalori di A_0 sono 1 e 6. Due autovettori corrispondenti sono $v_1 = (2, 1)$ e $v_2 = (1, -2)$. Un'isometria che trasforma la conica nella sua forma canonica euclidea è quindi

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y) \\ y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y) \end{cases}$$

poichè nell'equazione non sono presenti i termini lineari e quindi non è necessario operare una traslazione.

Soluzione dell'esercizio 5
Si veda la soluzione dell'esercizio 3 e del punto (iii) dell'esercizio 4.

Soluzione dell'esercizio 6
La topologia τ è composta, oltre che da X e dall'insieme vuoto, di tutti e soli gli insiemi del tipo $(0, \delta)$ con $\delta \in (0, 1]$. Questo vuol dire che ogni aperto di X è anche un aperto di (I, τ_e) dove τ_e è la topologia indotta da quella euclidea su I. Siamo quindi di fronte a due topologie confrontabili con quella di X che è più debole. Tra le varie conseguenze di questo fatto, abbiamo che ogni funzione $f : [0, 1] \to I$ (stiamo munendo $[0, 1]$ della topologia euclidea) che è continua per la topologia euclidea è continua con τ. In particolare, siccome (I, τ_e) è connesso per archi, anche X lo è. Lo stesso vale per la connessione.

Mostriamo che X è T_0. Siano a, b due punti distinti di X. Se $a = 0$ allora ogni intorno di b diverso da X non contiene a. Se entrambi sono diversi da 0 posso assumere $a < b$: l'insieme $(0, (a + b)/2)$ è un aperto in X che contiene a ma non b. Abbiamo mostrato che per ogni coppia di punti esiste un aperto che contiene uno dei due ma non l'altro: questa è la definizione di spazio topologico T_0.

X è compatto infatti se $\{U_j\}_{j\in J}$ è una collezione di aperti di X che copre X allora esiste almeno un $\bar{j} \in J$ tale che $0 \in U_{\bar{j}}$. Ma l'unico aperto di X che contiene 0 è X quindi ogni ricoprimento aperto contiene X. Un sottoricoprimento finito è quindi $\{U_{\bar{j}}\} = \{X\}$.

Mostrare che $P = \{3/4\}$ non è chiuso è semplice infatti il suo complementare non è aperto. Questo basta per concludere che X non è T_1 (e di conseguenza nemmeno di Hausdorff). Siccome gli aperti non banali sono tutti e soli gli insiemi del tipo $(0, \delta)$, i chiusi in X diversi da X e dal vuoto sono del tipo

$$\{0\} \cup [\delta, 1)$$

con $\delta \in (0, 1]$ e $\{0\}$. I chiusi di Y sono della stessa forma con $\delta \in (1/2, 1]$. Di conseguenza la chiusura di P in Y è $\overline{P} = \{0\} \cup [3/4, 1)$.

Il punto $Q = \{0\}$ è chiuso in X infatti il suo complementare è $(0, 1)$ che è un aperto. Di conseguenza Q è anche un chiuso in Y infatti $Q = Q \cap Y$ (tutti i chiusi di Y sono di questo tipo).

Si consideri l'arco $f : [0, 1] \to Y$ tale che $f(0) = 0$ e $f(t) = 1/2 + t/4$ (si ha quindi $f(1) = 3/4$). Mostriamo che f è un arco continuo in Y. Definiamo, per comodità, $U_\delta = (1/2, \delta)$ con $\delta \in (1/2, 1]$ e $U_0 = Y$. Questi sono tutti e soli gli aperti non vuoti di Y. Si ha

$$f^{-1}(U_\delta) = \begin{cases} \text{se } \delta = 0 & f^{-1}(Y) = [0, 1] \\ \text{se } \delta < 3/4 & (0, 4\delta - 2) \\ \text{se } \delta \geq 3/4 & (0, 1] \end{cases}$$

quindi la controimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di $[0, 1]$ con la topologia indotta da quella euclidea: f è un arco continuo in Y che collega 0 e 3/4.